
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01210173 9



COLLECTION

DE

MÉMOIRES

RELATIFS A LA

PHYSIQUE.

TOME V.


ΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

COLLECTION

DE

MÉMOIRES

RELATIFS A LA

PHYSIQUE,

PUBLIÉS PAR

LA SOCIÉTÉ FRANÇAISE DE PHYSIQUE.

TOME V.

MÉMOIRES SUR LE PENDULE,

SECONDE PARTIE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Quai des Grands-Augustins, 55.

1891


LIBRARY
AUG 1 1970
UNIVERSITY OF

RECHERCHES

SUR LA

LONGUEUR DU PENDULE SIMPLE

QUI BAT LA SECONDE;

PAR F.-W. BESSEL.

(Extrait des *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour 1826.)

[SUITE (1).]

APPENDICES ET TABLEAUX D'EXPÉRIENCES.

APPENDICE I.

Mouvement d'un pendule dont le fil s'enroule sur un cylindre horizontal.

1. Par l'axe du cylindre de déroulement, menons un plan vertical et un plan horizontal; soient x la distance au plan horizontal d'un point de la courbe produite par le déroulement du fil, et y la distance de ce point à l'autre plan. Soient u l'angle du fil avec le plan vertical, r sa longueur comptée à partir de son point de contact avec le cylindre, ρ la valeur de r pour $u = 0$, et a le rayon du cylindre. Si l'on compte u positivement du côté vers lequel le fil se déroule, on a,

$$r = \rho + au,$$
$$x = (\rho + au)\cos u - a\sin u,$$
$$y = (\rho + au)\sin u + a\cos u.$$

Si λ est la longueur du pendule simple battant la seconde et si le

(1) *Voir*, tome IV, p. 124, la première Partie de ce Mémoire.

temps t est exprimé en secondes de temps moyen, l'équation différentielle du mouvement d'un point sur une courbe donnée est, comme on sait,

$$c = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} - 2\pi^2\lambda x$$

et, dans le cas actuel,

$$c = (\rho + au)^2 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 - 2\pi^2\lambda[(\rho + au)\cos u - a\sin u].$$

et, si l'on désigne par $-u'$ l'angle qui correspond au commencement de l'oscillation

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} (\rho + au)^2 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 2\pi^2\lambda[& (\rho + au)\cos u - a\sin u \\ & -(\rho - au')\cos u' - a\sin u']. \end{aligned} \right.$$

2. L'étude de l'influence des causes perturbatrices sur le mouvement d'un pendule exige le plus souvent que l'on déduise ce mouvement d'une équation différentielle de la forme

$$c = [1 + 2f'(u)] \left(\frac{du}{dt}\right)^2 - 2n^2[\cos u + f(u)],$$

dans laquelle $f'(u)$ et $f(u)$ sont des fonctions de u, de l'ordre des forces perturbatrices. Je vais donc, à cette occasion, développer le mouvement qui est la conséquence de cette équation, en admettant que l'on ne pousse pas l'approximation au delà du premier ordre de $f(u)$ et de $f'(u)$.

La vitesse angulaire du pendule s'annule lorsque

$$0 = c + 2n^2[\cos u + f(u)];$$

c'est ce qui a lieu au commencement d'une oscillation, et la valeur de u qui répond à la fin de l'oscillation est une seconde racine de cette équation. Soient $-u'$ la première de ces racines, $u' - \delta u'$ la seconde ; on obtient

$$(2) \quad \delta u' = \frac{f(-u') - f(u')}{\sin u'}.$$

Pour l'oscillation opposée, on a la même valeur, mais avec un signe contraire. Les angles ne sont donc pas altérés, et leur expression en fonction de l'amplitude observée, c'est-à-dire de la demi-

somme u'' des écarts du pendule, de part et d'autre de la verticale, est

$$\text{Pour la limite négative....}\quad -u'' = \frac{f(-u') - f(u')}{\sin u'},$$

$$\text{Pour la limite positive....}\quad u'' = \frac{f(-u') - f(u')}{\sin u'}.$$

Ceci suppose que $f(u)$ est indépendant du sens dans lequel s'exécute le mouvement; s'il n'en est pas ainsi et si $f(u)$ est une fonction à double forme qui prend une expression différente pour les deux sens opposés du mouvement, l'invariabilité des angles n'a pas lieu.

Afin d'obtenir la relation qui lie t et u, j'introduis un nouvel angle φ, tel que $\cos u + f(u)$ soit égal au produit du cosinus de ce nouvel angle par une constante. Pour que φ soit toujours possible et puisse aussi devenir égal à zéro, il est nécessaire que la constante soit égale au maximum de $\cos u + f(u)$ ou, à une quantité près de l'ordre de $f(u)^2$, soit égale à $1 + f(0)$. On a donc

$$[1 + f(0)]\cos\varphi = \cos u + f(u);$$

d'où

$$u = \varphi + \frac{f(\varphi) - f(0)\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Si l'on porte cette valeur dans l'équation différentielle, cette équation se transforme en celle-ci :

$$[1 + 2f'(\varphi)]\left[\frac{d\varphi + d\,\dfrac{f(\varphi) - f(0)\cos\varphi}{\sin\varphi}}{dt}\right]^2 = 2n^2[1 + f(0)][\cos\varphi - \cos\varphi'];$$

et, en extrayant les racines carrées des deux membres, on obtient

$$dt = \pm\frac{d\varphi}{n\sqrt{2\cos\varphi - 2\cos\varphi'}} - \frac{\left[f'(\varphi) - \frac{1}{2}f(0)\right]d\varphi + d\,\dfrac{f(\varphi) - f(0)\cos\varphi}{\sin\varphi}}{n\sqrt{2\cos\varphi - 2\cos\varphi'}}.$$

Le signe + correspond aux oscillations dirigées dans le sens positif; le signe — aux oscillations de sens opposé.

L'intégrale de cette différentielle, prise de $\mp\varphi'$ à $\pm\varphi'$, est la durée d'une oscillation complète; si l'on veut la rendre dépendante de l'amplitude observée u'', il faudra, après l'intégration effec-

tuée, exprimer φ' en fonction de u'', ce qui donne

$$-\varphi' = -u' + \frac{f(-u') - f(0)\cos u'}{\sin u'}$$
$$= -u'' - \frac{2f(0)\cos u' - f(u') - f(-u')}{2\sin u'},$$
$$\varphi' = u' - \frac{f(u') - f(0)\cos u'}{\sin u'}$$
$$= u'' - \frac{2f(0)\cos u' - f(u') - f(-u')}{2\sin u'}.$$

Le premier terme de l'intégrale est évidemment

$$\frac{\pi}{n}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{1}{2}\varphi' + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4\frac{1}{2}\varphi' + \ldots\right] \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{n}\mathrm{F}(\varphi')$$

ou encore, en fonction de u'',

$$\frac{\pi}{n}\left[\mathrm{F}(u'') + \frac{d\mathrm{F}(u'')}{du''}\,\frac{2f(0)\cos u' - f(u') - f(-u')}{2\sin u'}\right].$$

Dans le second terme, qui est de l'ordre de la force perturbatrice, on peut mettre u à la place de φ. On obtient ainsi l'expression de la durée d'oscillation égale pour les deux sens du mouvement :

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\pi}{n}\left[\mathrm{F}(u'') + \dfrac{d\mathrm{F}(u'')}{du''}\,\dfrac{2f(0)\cos u' - f(u') - f(-u')}{2\sin u'}\right] \\ \qquad + \dfrac{1}{n}\displaystyle\int \frac{\left[f'(u) - \frac{1}{2}f(0)\right]du + d\,\dfrac{f(u) - f(0)\cos u}{\sin u}}{\sqrt{2\cos u - 2\cos u'}}. \end{cases}$$

Cette intégrale doit être prise de $-u'$ à $+u'$.

3. Quand les oscillations sont très petites, comme c'est le cas dans les observations du pendule, on peut négliger le plus souvent les produits des perturbations par les puissances supérieures de u'. Si l'on prend pour $f(u)$ et $f(u')$ les formes

$$f(u) = \alpha + \alpha'\sin\tfrac{1}{2}u + \alpha''\sin^2\tfrac{1}{2}u + \ldots,$$
$$f'(u) = \beta + \beta'\sin\tfrac{1}{2}u + \beta''\sin^2\tfrac{1}{2}u + \ldots,$$

et si l'on néglige les produits des coefficients de ces deux séries

par les puissances de u' supérieures à la deuxième, on trouve

$$\frac{2f(0)\cos u' - f(u') - f(-u')}{2} = -(2\alpha + \alpha'')\sin^2\frac{1}{2}u',$$

$$f'(u) - \frac{1}{2}f(0) - \frac{d\left[\dfrac{f(u) - f(0)\cos u}{\sin u}\right]}{du}$$

$$= \beta - \frac{\alpha''}{4} - \left(\beta' - \frac{\alpha'}{4} + \frac{\alpha'''}{2}\right)\sin\frac{1}{2}u - \left(\beta'' + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha'}{4} - \frac{3\alpha^{\text{IV}}}{4}\right)\sin^2\frac{1}{2}u,$$

et l'on arrive ainsi à l'expression de la durée d'oscillation complète dans les limites d'approximation adoptées :

$$\frac{\pi}{n}\left[F(u'')\left(1 - \beta + \frac{\alpha''}{4}\right) - \sin^2\frac{1}{2}u'\left(\frac{\beta''}{2} - \frac{3\alpha^{\text{IV}}}{8}\right)\right].$$

Soit l la longueur du pendule simple qui oscille dans le même temps que le pendule en question de $-u''$ à $+u''$; on a

$$\frac{l}{\lambda}[F(u'')]^2 = \frac{\pi^2}{n^2}\left[F(u'')\left(1 - \beta + \frac{\alpha''}{4}\right) - \sin^2\frac{1}{2}u'\left(\frac{\beta''}{2} - \frac{3\alpha^{\text{IV}}}{8}\right)\right]^2,$$

d'où

$$(1) \qquad l = \frac{\pi^2\lambda}{n^2}\left[1 - 2\beta + \frac{\alpha''}{2} - \sin^2\frac{1}{2}u'\left(\beta'' - \frac{3\alpha^{\text{IV}}}{4}\right)\right]\cdots.$$

4. Pour le pendule dont on avait à considérer ici le mouvement, l'équation (1) devient

$$f'(u) = \frac{\alpha}{\rho}\left(2\sin\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{3}\sin^3\tfrac{1}{2}u + \ldots\right),$$

$$f(u) = \frac{\alpha}{\rho}\left(\tfrac{1}{3}\sin^3\tfrac{1}{2}u + \ldots\right),$$

$$n^2 = \frac{\pi^2\lambda}{\rho};$$

donc $\beta = \beta'' = \alpha'' = \alpha^{\text{IV}} = 0$, et l'on en conclut

$$l = \rho;$$

donc ce pendule accomplit une oscillation entière dans le même temps que mettrait à l'accomplir un pendule simple suspendu au centre du cylindre de déroulement et descendant aussi bas que le premier.

APPENDICE II.

Influence de l'élasticité du fil sur la forme de ce fil et sur la durée d'oscillation du pendule.

1. Je vais d'abord déterminer la forme que prend un fil imparfaitement flexible, de longueur donnée S, lorsqu'il est fixé par son extrémité supérieure et que, passant ensuite sur un cylindre fixe horizontal de rayon a, il est tiré à son extrémité inférieure par une force T'', qui fait un angle ω'' avec la verticale.

Je prends le centre du cylindre pour origine des coordonnées x et y. La coordonnée x représente la distance d'un point à la ligne horizontale menée par le centre du cylindre; l'autre, y, la distance à la verticale passant par ce même centre; la première est comptée positivement de haut en bas, l'autre du côté où le fil est en contact avec le cylindre. Les coordonnées de l'extrémité fixe du fil sont x' et y', celles de l'autre extrémité x'' et y''. L'angle du fil avec la verticale sera désigné d'une manière générale par φ; pour l'extrémité fixe, il sera φ', pour l'autre φ''.

D'après le principe des vitesses virtuelles, la propriété caractéristique de la figure que prend le fil dans la position d'équilibre est la suivante : si l'on fait varier infiniment peu la figure, de façon que la variation reste compatible avec les conditions auxquelles cette figure doit satisfaire, et si, en chaque point, on multiplie la force qui agit sur ce point par la projection du déplacement du point sur la direction de cette force, la somme de tous ces produits est nulle.

J'appliquerai ici la méthode fondée sur ce principe, et donnée par Lagrange dans son immortelle *Mécanique analytique*.

2. L'élasticité du fil peut être considérée comme une force qui s'annule quand le fil est rectiligne, et qui, lorsque le fil est courbé, tend à diminuer sa courbure. D'après la notation employée au premier paragraphe, cette force, que j'appellerai E, tend donc à diminuer la variation de φ quand on passe d'un point à l'autre du fil. D'après cela, si l'on désigne par $\varphi + \delta\varphi$ cet angle dans la courbe infiniment voisine et par $d\varphi$ et $d\varphi + d\delta\varphi$ ses variations dans la courbe d'équilibre et dans la deuxième, le produit de la force

par le déplacement effectué dans sa direction sera $\mathrm{E}\,d\delta\varphi$ et la somme de tous ces produits s'exprimera par

$$\int \mathrm{E}\,d\delta\varphi.$$

Je considérerai l'extrémité supérieure du fil comme libre, en supposant appliquée à ce point une force égale et opposée à la traction que le fil exerce sur le point d'attache. Soit T' cette force inconnue et soit $180^\circ - \omega'$ l'angle également inconnu qu'elle fait avec la verticale. Décomposons cette force T' et la force T'', qui agit sous l'angle ω'' à l'extrémité inférieure du fil, suivant les deux axes des coordonnées. Nous obtiendrons

Suivant l'axe des x.... $-\mathrm{T}'\cos\omega'$ et $\mathrm{T}''\cos\omega''$,
Suivant l'axe des y.... $-\mathrm{T}'\sin\omega'$ et $\mathrm{T}''\sin\omega''$,

et ces forces, multipliées par les variations des coordonnées de leurs points d'application, donnent des produits qui, ajoutés à la somme trouvée plus haut, permettent d'écrire l'équation de condition complète de l'équilibre

$$(1)\quad \begin{cases} 0 = -\mathrm{T}'\cos\omega'\,\delta x' - \mathrm{T}'\sin\omega'\,\delta y' \\ \qquad + \mathrm{T}''\cos\omega''\,\delta x'' + \mathrm{T}''\sin\omega''\,\delta y'' + \int \mathrm{E}\,d\delta\varphi. \end{cases}$$

Dans cette équation, les variations doivent être prises telles qu'elles ne soient pas en contradiction avec les conditions auxquelles la forme de la courbe est assujettie. La première de ces conditions est que les coordonnées x et y dans la courbe de l'équilibre, et $x + \delta x$, $y + \delta y$ dans la courbe infiniment voisine, correspondent à un seul et même point du fil, ou que la longueur du fil, comptée depuis l'extrémité origine jusqu'à ce point, soit la même pour les deux courbes. Cette condition s'écrit

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int \sqrt{(dx + d\delta x)^2 + (dy + d\delta y)^2}$$

ou, si ds est l'élément différentiel de la longueur,

$$(2)\qquad 0 = \int \left(\frac{dx}{ds}\,d\delta x + \frac{dy}{ds}\,d\delta y \right).$$

L'autre condition exige que les deux courbes soient tangentes à

la surface du cylindre ou que, pour les points communs aux deux courbes et à cette surface, on ait

$$a^2 = x^2 + y^2 = (x + \delta x)^2 + (y + \delta y)^2;$$

d'où résulte, pour ces points, l'équation de condition

$$(3) \qquad 0 = x\,\delta x + y\,\delta y.$$

3. L'équation (2) doit être satisfaite dans toute l'étendue du fil; on a donc le droit de la réunir à l'équation (1), en ajoutant à cette équation (1) le produit de la quantité placée sous le signe d'intégration dans l'équation (2) par un facteur indéterminé λ. On obtient ainsi

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 = &- \mathrm{T}'\cos\omega'\,\delta x' - \mathrm{T}'\sin\omega'\,\delta y' + \mathrm{T}''\cos\omega''\,\delta x'' + \mathrm{T}''\sin\omega''\,\delta y'' \\ &+ \int \left(\mathrm{E}\, d\,\delta\varphi + \lambda \frac{dx}{ds}\, d\,\delta x + \lambda \frac{dy}{ds}\, d\,\delta y \right). \end{aligned} \right.$$

Pour exprimer maintenant $d\,\delta\varphi$ en fonction des coordonnées x et y, on a les relations

$$\cos\varphi = \frac{dx}{ds}, \qquad \cos(\varphi + \delta\varphi) = \frac{dx + d\,\delta x}{ds},$$

$$\sin\varphi = \frac{dy}{ds}, \qquad \sin(\varphi + \delta\varphi) = \frac{dy + d\,\delta y}{ds};$$

d'où

$$\delta\varphi = \frac{dx\,d\,\delta y - dy\,d\,\delta x}{ds^2}.$$

L'équation (4) devient alors

$$\begin{aligned} 0 = &- \mathrm{T}'\cos\omega'\,\delta x' - \mathrm{T}'\sin\omega'\,\delta y' + \mathrm{T}''\cos\omega''\,\delta x'' + \mathrm{T}''\sin\omega''\,\delta y'' \\ &+ \int \left(\mathrm{E}\, d\,\frac{dx\,d\delta y}{ds^2} - \mathrm{E}\, d\,\frac{dy\,d\delta x}{ds^2} + \lambda \frac{dx}{ds}\, d\delta x + \lambda \frac{dy}{ds}\, d\delta y \right) \end{aligned}$$

et donne, après intégration,

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 = &- \mathrm{T}'\cos\omega'\,\delta x' - \mathrm{T}'\sin\omega'\,\delta y' + \mathrm{T}''\cos\omega''\,\delta x'' + \mathrm{T}''\sin\omega''\,\delta y'' \\ &+ \mathrm{E} \left(\frac{dx\,d\delta y - dy\,d\delta x}{ds^2} \right) \\ &+ \delta x \left(\frac{dy\,d\mathrm{E}}{ds^2} + \lambda \frac{dx}{ds} \right) - \delta y \left(\frac{dx\,d\mathrm{E}}{ds^2} - \lambda \frac{dy}{ds} \right) \\ &- \int \delta x \left(d\,\frac{dy\,d\mathrm{E}}{ds^2} + d.\lambda \frac{dx}{ds} \right) \\ &+ \int \delta y \left(d\,\frac{dx\,d\mathrm{E}}{ds^2} - d.\lambda \frac{dy}{ds} \right). \end{aligned} \right.$$

Les valeurs des termes qu'on a fait sortir du signe d'intégration doivent être prises pour les deux extrémités du fil.

4. Les deux termes qui se trouvent sous le signe d'intégration doivent s'annuler séparément pour les divers points du fil qui ne sont pas en contact avec le cylindre, car δx et δy doivent rester arbitraires. Pour les parties libres du fil, on a donc

$$0 = d\,\frac{dy\,dE}{ds^2} - d.\lambda\,\frac{dx}{ds},$$

$$0 = d\,\frac{dx\,dE}{ds^2} + d.\lambda\,\frac{dy}{ds},$$

et, en intégrant,

$$c = \frac{dy\,dE}{ds^2} + \lambda\,\frac{dx}{ds},$$

$$c' = \frac{dx\,dE}{ds^2} - \lambda\,\frac{dy}{ds}.$$

Il en résulte immédiatement

(6) $$\lambda = c\,\frac{dx}{ds} - c'\,\frac{dy}{ds},$$

(7) $$\frac{dE}{ds} = c\,\frac{dy}{ds} + c'\,\frac{dx}{ds},$$

et, si l'on intègre cette dernière équation,

(8) $$E = cy + c'x + c''.$$

Pour la portion du fil qui est en contact avec le cylindre, les conditions de l'équilibre ordinaire disparaissent, et, comme le contact du cylindre s'oppose également à la variation de φ, il ne reste de l'équation (5), pour ces points, que la relation suivante :

$$0 = \delta x\left(d\,\frac{dy\,dE}{ds^2} + d.\lambda\,\frac{dx}{ds}\right) - \delta y\left(d\,\frac{dx\,dE}{ds^2} - d.\lambda\,\frac{dy}{ds}\right).$$

Mais l'équation de condition (3) donnait une relation, pour ces points, entre δx et δy; si on l'applique ici, l'équation qu'on vient de trouver se transforme en celle-ci :

$$0 = y\,d\,\frac{dy\,dE}{ds^2} + x\,d\,\frac{dx\,dE}{ds^2} + y\,d.\lambda\,\frac{dx}{ds} - x\,d.\lambda\,\frac{dy}{ds}.$$

Si l'on effectue alors les différentiations indiquées dans la présente égalité et si l'on remarque que, les points considérés étant

sur la surface du cylindre, on a

$$0 = x\,dx + y\,dy, \qquad 0 = dx^2 + dy^2 + x\,d^2x + y\,d^2y,$$

on arrive à l'équation suivante, qui s'applique aux points du fil en contact avec le cylindre :

$$0 = d\mathrm{E} - a\,d\lambda,$$

ou, si d désigne une constante arbitraire,

$$d = \mathrm{E} - a\lambda. \tag{9}$$

5. Les termes de l'équation (5), qui sont relatifs aux deux points extrêmes du fil, donnent les deux équations

$$0 = \mathrm{E}'\left(\frac{dx'\,d\delta y' - dy'\,d\delta x'}{ds^2}\right) + \delta x'\left(-\mathrm{T}'\cos\omega' - \frac{dy'\,d\mathrm{E}'}{ds^2} + \lambda'\frac{dx'}{ds}\right)$$
$$+ \delta y'\left(-\mathrm{T}'\sin\omega' - \frac{dx'\,d\mathrm{E}'}{ds^2} + \lambda'\frac{dy'}{ds}\right),$$

$$0 = \mathrm{E}''\left(\frac{dx''\,d\delta y'' - dy''\,d\delta x''}{ds^2}\right) + \delta x''\left(\mathrm{T}''\cos\omega'' - \frac{dy''\,d\mathrm{E}''}{ds^2} + \lambda''\frac{dx''}{ds}\right)$$
$$+ \delta y''\left(\mathrm{T}''\sin\omega'' - \frac{dx''\,d\mathrm{E}''}{ds^2} + \lambda''\frac{dy''}{ds}\right).$$

Ces deux points extrêmes étant considérés comme libres, les variations des coordonnées, ainsi que leurs quotients différentiels, restent arbitraires. On aura donc

$$(10)\quad \begin{cases} 0 = \mathrm{E}', \\ 0 = -\mathrm{T}'\cos\omega' - \dfrac{dy'\,d\mathrm{E}'}{ds^2} + \lambda'\dfrac{dx'}{ds}, \\ 0 = -\mathrm{T}'\sin\omega' - \dfrac{dx'\,d\mathrm{E}'}{ds^2} + \lambda'\dfrac{dy'}{ds}, \\ 0 = \mathrm{E}'', \\ 0 = \mathrm{T}''\cos\omega'' - \dfrac{dy''\,d\mathrm{E}''}{ds^2} + \lambda''\dfrac{dx''}{ds}, \\ 0 = \mathrm{T}''\sin\omega'' - \dfrac{dx''\,d\mathrm{E}''}{ds^2} + \lambda''\dfrac{dy''}{ds}. \end{cases}$$

Comme les intégrales de l'équation (5) ne peuvent être prises d'une manière continue de l'une des extrémités du fil à l'autre extrémité, mais changent de signification en passant des points libres du fil à ceux qui touchent le cylindre, les équations (6), (7)

et (8), qui s'en déduisent, s'appliquent bien à tous les points libres du fil, mais les constantes c, c', c'' ne sont pas nécessairement les mêmes pour les deux portions libres de ce fil que sépare la partie en contact avec le cylindre. Pour la région libre supérieure, je conserverai la notation c, c', c''; pour l'inférieure, j'écrirai c_1, c'_1, c''_1. Les équations (10) se transforment alors comme il suit, au moyen des équations (6), (7) et (8) :

$$(11)\quad \begin{cases} 0 = cy' - c'x' - c'', \\ 0 = -T'\cos\omega' - c, \\ 0 = T'\sin\omega' - c', \\ 0 = c_1 y'' - c'_1 x'' - c''_1, \\ 0 = T''\cos\omega'' - c_1, \\ 0 = T''\sin\omega'' - c'_1. \end{cases}$$

6. Pour déterminer la forme du fil, il faut que E soit exprimé au moyen de l'élasticité de ce fil. Je supposerai pour cela le fil uniforme dans toutes ses parties et, de plus, j'adopterai l'hypothèse que l'on a toujours prise pour base des recherches sur les lignes élastiques. On imagine à chaque extrémité du fil, un élément infiniment petit de ce fil, prolongé par une droite inflexible; l'une de ces lignes est fixe; l'autre, à une distance e de l'élément du fil, subit normalement l'action d'une force k, dont l'effet est de courber le fil, de façon à lui faire prendre un rayon de courbure h. Si l'on suppose à e, k, h d'autres valeurs, e', k', h', l'hypothèse adoptée consiste à admettre que les rayons de courbure sont inversement proportionnels aux moments de rotation des forces ou que

$$h : h' = e'k' : ek;$$

d'où l'on tire

$$e'k' = \frac{ekh}{h'}.$$

Ce produit $e'k'$ est la force que nous avons désignée par E (la distance étant prise égale à l'unité); h' est le rayon de courbure de la courbe formée par le fil, et ekh, que je désignerai à l'avenir par μ, est la mesure de l'élasticité du fil. La concavité de la courbe étant tournée vers l'axe, on a

$$E = -\frac{\mu\, dx\, d^2y}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)^3}}.$$

7. Si l'on substitue à E l'expression (8), on obtient l'équation différentielle de la courbe

$$(12)\qquad -\frac{\mu\,dx\,d^2y}{\sqrt{(dx^2+dy^2)^3}} = cy + c'x + c'',$$

et, si l'on multiplie cette équation par $c\,dy + c'\,dx$, et qu'on intègre, on a, en désignant par e une constante arbitraire,

$$(13)\qquad \mu\left(\frac{c\,dx - c'\,dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}\right) - e = \tfrac{1}{2}(cy + c'x + c'')^2,$$

d'où l'on tire la différentielle complète

$$(14)\qquad c'\,dy - c\,dx = \frac{(c\,dy + c'\,dx)\left[e + \frac{1}{2}(cy + c'x + c'')^2\right]}{\sqrt{\mu^2(c^2 + c'^2) - \left[e + \frac{1}{2}(cy + c'x + c'')^2\right]^2}}.$$

L'intégrale de cette différentielle est l'équation définitive de la courbe.

Si l'on prend l'intégrale de (13) depuis le point initial du fil jusqu'au point où commence le contact du fil et du cylindre, et si l'on appelle ψ' l'angle de la tangente en ce point avec la verticale, on obtient une relation entre φ' et ψ'. Prenons ensuite l'intégrale de (14) entre les mêmes limites; comme les coordonnées du point de contact dépendent de ψ' et que l'on a

$$x_1 = -a\sin\psi', \qquad y_1 = a\cos\psi',$$

cette intégrale donnera une seconde relation entre les mêmes angles; ces deux angles pourront de la sorte être déterminés en fonction de x', y', T′ et ω'. En procédant de même, on établira deux relations entre les angles analogues φ'' et ψ'', correspondant à la portion du fil comprise entre le cylindre et l'extrémité inférieure, au moyen desquelles ces angles seront donnés en fonction de x'', y'', T″ et ω''.

Si, entre les points ψ' et ψ'', le fil s'applique exactement sur la surface du cylindre, l'équation (9) montre que λ est le même pour ces deux points; en effet, E dépend du rayon de courbure du fil, et celui-ci reste invariable pour tous les points de la surface du cylindre. On a donc, d'après (6),

$$c\cos\psi' - c'\sin\psi' = c_1\cos\psi'' - c'_1\sin\psi'',$$

et, si l'on remplace les constantes par leurs expressions (11)

$$(15) \qquad -\mathrm{T}'\cos(\omega'-\psi') = \mathrm{T}''\cos(\psi''-\omega'').$$

En outre, l'équation (8) donne

$$\mathrm{E}_1 = c y_1 + c' x_1 + c'', \qquad \mathrm{E}_2 = c_1 y_2 + c'_1 x_2 + c''_1$$

ou, comme ces deux quantités sont égales à $\frac{\mu}{a}$, d'après l'équation (11),

$$\frac{\mu}{a} = a\,\mathrm{T}'\cos(\omega'-\psi') + c'' = -a\,\mathrm{T}''\cos(\psi''-\omega'') + c''_1\,;$$

d'où, en se reportant à (15),

$$(16) \qquad c'' = c''_1 = \frac{\mu}{a} - a\,\mathrm{T}'\cos(\omega'-\psi').$$

Les deux équations (16), l'équation (15) et une quatrième que l'on obtient par l'expression de la longueur totale du fil, déterminent les quantités T', ω', x'', y'', restées jusqu'à présent inconnues dans les expressions de φ', ψ', φ'', ψ''.

Lorsque, au contraire, le fil n'a qu'un point de contact avec le cylindre, on a $\psi' = \psi''$, et les équations (6) et (8) donnent

$$-\mathrm{T}'\cos(\omega'-\psi') = \mathrm{T}''\cos(\psi''-\omega''),$$
$$c'' = c''_1.$$

Si l'on joint ces relations à l'expression de la longueur totale du fil, toutes les quantités inconnues se trouvent déterminées.

8. L'achèvement de la solution du problème par la méthode que je viens d'exposer se heurte à cette difficulté, que l'intégration de l'équation différentielle (14) dépend d'une fonction transcendante, qui ne permet pas l'élimination des diverses quantités inconnues. Cette difficulté disparaît, si l'on suppose le fil indéfiniment prolongé de chaque côté du cylindre ; ce qui fait qu'à ses deux extrémités, il prend les directions mêmes dans lesquelles le tirent les forces T' et T'' ; en outre, il est clair qu'alors ces deux forces deviennent égales entre elles et que les deux branches du fil sont symétriques.

Je vais donc développer complètement le problème suivant : *Déterminer la figure que prend un fil infiniment long, sollicité par*

deux forces égales T'', *dans deux directions données* $180^\circ + \omega'$ *et* ω'', *et qui est en contact avec un cylindre.* Ce problème ne diffère pas essentiellement de celui auquel donne lieu l'appareil du pendule. En effet, dans l'appareil, μ est vis-à-vis de T'' une quantité très petite, et par suite la courbure du fil devient inappréciable dès qu'on s'éloigne du cylindre d'une distance sensible, même très petite; il est donc indifférent de limiter le fil ou de lui supposer une longueur indéfinie.

Pour donner à l'équation (14) une forme plus simple, je vais introduire de nouvelles coordonnées rectangulaires ξ et η, dans lesquelles les ξ seront comptés sur les asymptotes aux branches de la courbe, et auront pour origine le point où la branche considérée cesse d'être en contact avec le cylindre; je désignerai par b la valeur de η pour $\xi = 0$. On obtient ainsi, pour la branche supérieure,

$$(17)\qquad \begin{cases} x = -\xi\cos\omega' - (b - \eta)\sin\omega' + a\sin\psi', \\ y = -\xi\sin\omega' + (b - \eta)\cos\omega' - a\cos\psi', \end{cases}$$

et, pour la branche inférieure,

$$(18)\qquad \begin{cases} x = \xi\cos\omega'' - (b - \eta)\sin\omega'' - a\sin\psi'', \\ y = \xi\sin\omega'' + (b - \eta)\cos\omega'' + a\cos\psi''. \end{cases}$$

Avec ces nouvelles coordonnées, si l'on désigne par x', y' les coordonnées d'un point infiniment éloigné, l'expression

$$cy - c'x + c'',$$

qui, d'après les équations (11), peut s'écrire

$$c(y - y') + c'(x - x'),$$

devient

$$= \mathrm{T}''\eta.$$

De plus, l'équation (13) donne, pour un point du fil infiniment éloigné,

$$e = -\mathrm{T}''\mu.$$

et, pour $\xi = 0$, auquel cas $\frac{dx}{ds} = \cos\psi'$, $\frac{dy}{ds} = \sin\psi'$, on aura

$$-\mathrm{T}''\mu\cos(\omega' - \psi') = -\mathrm{T}''\mu + \tfrac{1}{2}\mathrm{T}''\mathrm{T}''bb,$$

ou

$$bb = \frac{2\mu}{\mathrm{T}''}[1 - \cos(\omega' - \psi)],$$

$$(19)\qquad b = 2\sqrt{\frac{\mu}{\mathrm{T}''}}\sin z.$$

en posant

$$2z = \omega' - \psi' = \psi'' - \omega''.$$

Pour faire disparaître l'incertitude résultant de ces deux cas possibles, que le fil touche le cylindre en un certain nombre de ses points, auquel cas ψ' et ψ'' sont inégaux, ou que le fil n'ait avec le cylindre qu'un seul point de contact et que ces deux angles se confondent, on se reportera à l'équation

$$c y_1 + c' x_1 - c'' = E_1.$$

En effet, le premier membre est égal à $T'' b$, le second à $\frac{\mu}{h}$, où h représente le rayon de courbure; si alors on remplace b par son expression (19), il vient

$$\sin z = \frac{1}{2h}\sqrt{\frac{\mu}{T''}}.$$

Dans le premier cas, h est égal au rayon du cylindre, et $2z$ est plus petit que $\frac{1}{2}(\omega' - \omega'')$; donc

$$\sin z = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\mu}{T''}} \quad \text{et} \quad \sin\frac{1}{4}(\omega' - \omega'') > \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\mu}{T''}}.$$

Dans le second cas, h n'est pas plus petit que le rayon du cylindre, mais $2z = \frac{1}{2}(\omega' - \omega'')$; donc

$$\sin z = \sin\frac{1}{4}(\omega' - \omega'') \quad \text{et} \quad \sin\frac{1}{4}(\omega' - \omega'') \geqq \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\mu}{T''}}.$$

De cette façon, on pourra distinguer entre les deux cas.

La valeur de la différentielle (14) se transforme quand on y introduit les nouvelles coordonnées, et devient

$$d\xi = \mp\sqrt{\frac{\mu}{T''}}\,\frac{\left(1 - \frac{T''}{2\mu}\eta_1\eta_1\right)d\eta_1}{\eta_1\sqrt{1 - \frac{T''}{4\mu}\eta_1\eta_1}},$$

et c'est le signe inférieur qu'il faut prendre, car η_1 diminue quand ξ croît. L'intégrale de cette différentielle, calculée depuis $\xi = 0$, sera

$$\xi = \sqrt{\frac{\mu}{T''}}\left[\log\left(\frac{b}{\eta_1}\,\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{T''}{4\mu}\eta_1\eta_1}}{1 + \sqrt{1 - \frac{T''}{4\mu}bb}}\right) - 2\sqrt{1 - \frac{T''}{4\mu}bb} + 2\sqrt{1 - \frac{T''}{4\mu}\eta_1^2}\,\right].$$

Enfin l'on obtient la valeur de l'arc de courbe, depuis $\xi = 0$ jusqu'au point ξ, η :

$$s = \int \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2} = \sqrt{\frac{\mu}{T''}} \log \left(\frac{b}{\eta} \, \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{T''}{4\mu}\eta\eta}}{1 + \sqrt{1 - \frac{T''}{4\mu} bb}} \right),$$

(21) $$s = \xi + 2\sqrt{\frac{\mu}{T''}} \left(\sqrt{1 - \frac{T''}{4\mu}\eta\eta} - \sqrt{1 - \frac{T''}{4\mu} bb} \right).$$

9. Pour déterminer le point où se trouve l'extrémité inférieure du fil, quand l'extrémité supérieure est fixe, il faut exprimer la longueur totale S de ce fil au moyen des quantités qui se rapportent à la courbe. D'après (21), si l'on fait $\eta' = \eta'' = 0$, et si l'on remplace b par son expression (19) :

$$s' = \xi' + 2\sqrt{\frac{\mu}{T''}}(1 - \cos z),$$

$$s'' = \xi'' + 2\sqrt{\frac{\mu}{T''}}(1 - \cos z);$$

donc, dans le premier cas,

$$S = s' + s'' + a(\psi' - \psi'') = \xi' + \xi'' + 4\sqrt{\frac{\mu}{T''}}(1 - \cos z) + a(\omega' - \omega'') - 4az.$$

Dans le second cas, la formule est la même, à cela près que les deux derniers termes disparaissent puisque $\omega' - \omega'' = 4z$.

Si l'on détermine maintenant la position des points extrêmes du fil par leurs distances ρ' et ρ'' à deux perpendiculaires menées du centre du cylindre sur les axes des ξ' et ξ'', et par les longueurs de ces perpendiculaires, on a, en remarquant que les deux perpendiculaires sont égales pour les deux branches et en appelant p leur longueur commune

(22) $$\begin{cases} p = b + a\cos 2z, \\ \rho' = \xi' - a \sin 2z, \\ \rho'' = \xi'' - a \sin 2z; \end{cases}$$

ce qui donne

$$S = \rho' + \rho'' - 2a(2z - \sin 2z) + 4\sqrt{\frac{\mu}{T''}}(1 - \cos z) + a(\omega' - \omega'').$$

Supposons maintenant le pendule à la position de repos et en

équilibre naturel, et désignons par ρ la distance de l'extrémité inférieure du fil au centre du cylindre, ou la valeur de ρ'' pour $\omega'' = 0$ et $T'' = 1$; par z' la valeur de z correspondante à cet état; si l'on remarque que ρ' ne change pas lorsque ω'' et T'' varie, on aura

$$S = \rho' + \rho - 2a(2z' - \sin 2z') - 4\sqrt{\mu}(1 - \cos z') - a\omega'.$$

Éliminons S des deux équations obtenues; il vient

$$(23)\quad \left\{ \begin{aligned} \rho'' = \rho + a\omega'' - 2a(2z - \sin 2z - 2z' + \sin 2z') \\ + 4\sqrt{\frac{\mu}{T''}}(1 - \cos z) - 4\sqrt{\mu}(1 - \cos z'). \end{aligned} \right.$$

Les valeurs de z et de b étant données plus haut, on voit que le problème est complètement résolu.

10. La figure du fil et la position de son extrémité inférieure étant déterminées par ce qui précède, je vais maintenant rechercher l'influence de l'élasticité sur la durée d'oscillation du pendule; pour cela, je supposerai la masse du pendule concentrée à l'extrémité inférieure du fil.

On peut considérer le mouvement de ce point comme entièrement libre, ou faire complètement abstraction de sa liaison avec le fil, pourvu qu'on le regarde comme soumis à l'action de deux forces, savoir la pesanteur et la force T'' qui détermine la figure du fil, mais prise en sens contraire de sa direction réelle; cette deuxième force fait donc avec la verticale un angle égal à $180° + \omega''$. On a alors pour expression des forces qui agissent suivant la direction des coordonnées x'' et y''

$$1 - T'' \cos\omega'' \quad \text{et} \quad - T'' \sin\omega'';$$

d'où les deux équations suivantes, puisque le point est considéré comme libre :

$$0 = \frac{d^2x''}{dt^2} + \pi^2\lambda(T''\cos\omega'' - 1),$$

$$0 = \frac{d^2y''}{dt^2} + \pi^2\lambda\, T''\sin\omega'',$$

où λ est la longueur du pendule simple à secondes, π la demi-circonférence du cercle de rayon 1, et t le temps exprimé en secondes de temps moyen. Remplaçons les coordonnées rectangu-

laires par leurs expressions en fonction de ρ'', p, ω'', savoir

$$x'' = \rho'' \cos\omega'' - p \sin\omega'',$$
$$y'' = \rho'' \sin\omega'' + p \cos\omega'',$$

et multiplions les deux équations respectivement par $\cos\omega''$ et $\sin\omega''$, puis par $-\sin\omega''$ et $\cos\omega''$; nous aurons, en faisant les sommes de leurs produits,

$$(24)\quad \begin{cases} 0 = \dfrac{d^2\rho''}{dt^2} - \rho''\left(\dfrac{d\omega''}{dt}\right)^2 - 2\dfrac{dp}{dt}\dfrac{d\omega''}{dt} - p\,\dfrac{d^2\omega''}{dt^2} - \pi^2\lambda\,(\mathrm{T}'' - \cos\omega''), \\ 0 = \dfrac{d^2 p}{dt^2} - p\left(\dfrac{d\omega''}{dt}\right)^2 + 2\dfrac{d\rho''}{dt}\dfrac{d\omega''}{dt} + \rho''\,\dfrac{d^2\omega''}{dt^2} - \pi^2\lambda \sin\omega''. \end{cases}$$

On obtient une première intégrale de ces deux équations en multipliant la première par $2(d\rho'' - p\,d\omega'')$, la seconde par $2(\rho''\,d\omega'' + dp)$, les ajoutant, et intégrant cette somme. Il vient ainsi

$$(25)\quad \begin{cases} c = \left(\rho''\dfrac{d\omega''}{dt} + \dfrac{dp}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{d\rho''}{dt} - p\,\dfrac{d\omega''}{dt}\right)^2 \\ \qquad - 2\pi^2\lambda\left[\rho''\cos\omega'' - p\sin\omega'' - \displaystyle\int \mathrm{T}''(d\rho'' - p\,d\omega'')\right]. \end{cases}$$

Le terme qui est encore sous le signe d'intégration est, dans chacun des deux cas, une différentielle exacte. D'après (22) et (23), on a en effet

$$p = b + a\cos 2z = 2\sqrt{\frac{\mu}{\mathrm{T}''}}\sin z + a\cos 2z,$$
$$\rho'' = \rho + a\omega'' + 2a(2z + \sin 2z - 2z' - \sin 2z')$$
$$- 4\sqrt{\frac{\mu}{\mathrm{T}''}}(1 - \cos z) - 4\sqrt{\mu}(1 - \cos z');$$

d'où

$$\mathrm{T}''(d\rho'' - p\,d\omega'') = a\mathrm{T}''(1 + \cos 2z)(d\omega'' + 4\,dz)$$
$$- 2\sqrt{\mu\mathrm{T}''}\sin z(d\omega'' - 2\,dz) + 2\sqrt{\frac{\mu}{\mathrm{T}''}}(1 - \cos z)\,d\mathrm{T}''.$$

Mais, dans le premier cas,

$$\sin z = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\mu}{\mathrm{T}''}}.$$

Si l'on élimine T'', au moyen de cette relation, la différentielle devient

$$= -\frac{\mu}{2a}\,d\omega'' - \frac{2\mu}{a}\,\frac{\cos z\,dz}{1 + \cos z} = -d\left[\frac{\mu}{2a}\,\omega'' + \frac{2\mu}{a}\left(z - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}z\right)\right].$$

Dans l'autre cas,

$$z = \tfrac{1}{2}(\omega' - \omega''), \qquad dz = -\tfrac{1}{2}d\omega''.$$

Alors la différentielle sera

$$-4\sqrt{\mu T''}\sin z\,dz - 2\sqrt{\frac{\mu}{T''}}(1-\cos z)\,dT$$
$$= -4\,d\left[\sqrt{\mu T''}(1-\cos z)\right].$$

D'après cela, l'équation (25) se transforme dans le premier cas de la façon suivante

$$(26)\quad \begin{cases} c = \left(\rho''\dfrac{d\omega''}{dt} + \dfrac{dp}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{d\rho''}{dt} - p\,\dfrac{d\omega''}{dt}\right)^2 \\ \qquad - 2\pi^2\lambda\left[\rho''\cos\omega'' + p\sin\omega'' + \dfrac{\mu}{2a}\,\omega'' + \dfrac{2\mu}{a}\left(z - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}z\right)\right] \end{cases}$$

et, dans le second cas,

$$(27)\quad \begin{cases} c = \left(\rho''\dfrac{d\omega''}{dt} + \dfrac{dp}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{d\rho''}{dt} - p\,\dfrac{d\omega''}{dt}\right)^2 \\ \qquad - 2\pi^2\lambda\left[\rho''\cos\omega'' - p\sin\omega'' - 4\sqrt{\mu T''}(1-\cos z)\right]. \end{cases}$$

11. Je poursuis l'intégration en posant cette condition que le pendule, avant le début du mouvement, repose sur un plan parallèle à l'axe du cylindre et incliné sur la verticale d'un angle $\omega'' = u'$, et que le mouvement du pendule résulte de la suppression de ce plan. D'après ces conditions, au début du mouvement, c'est-à-dire pour $t = 0$, ρ'' et p ont les valeurs (23) et (22) et, pour ce même instant, on a de plus

$$\frac{d\omega''}{dt} = 0, \qquad \frac{d\rho''}{dt} = 0, \qquad \frac{dp}{dt} = 0.$$

Je limiterai l'approximation aux grandeurs de l'ordre de $\sqrt{\mu}$ et de a, considérées toutes deux comme du premier ordre. Pour obtenir ce degré d'approximation, il suffit de connaître la force T'' en y négligeant même les termes du premier ordre; en effet, T'' n'entre dans les expressions de ρ'' et de p, et dans les équations (26) et (27), que multipliée par des quantités du premier ordre. On peut donc négliger les termes du premier ordre dans la première des équations (24), qui devient alors

$$0 = (T'' - \cos\omega'')\pi^2\lambda - \rho\left(\frac{d\omega''}{dt}\right)^2.$$

De plus, d'après (25), en négligeant les mêmes quantités, on a

$$c = \rho^2\left(\frac{d\omega''}{dt}\right)^2 - 2\pi^2\lambda\rho\cos\omega'',$$

et, pour le début du mouvement,

$$c = -2\pi^2\lambda\rho\cos u',$$

ce qui permet d'éliminer c et $\frac{d\omega''}{dt}$. On obtient ainsi l'expression de T″ débarrassée de tous les termes qu'il deviendrait inutile de considérer dans les calculs ultérieurs

(28) $$T'' = 3\cos\omega'' - 2\cos u'.$$

12. Dans les deux cas qui ont été distingués, le deuxième terme des équations (26) et (27) doit être négligé, car il est du second ordre. On a donc, dans le premier cas,

$$\left(\rho''\frac{d\omega''}{dt} - \frac{dp}{dt}\right)^2 = 2\pi^2\lambda\left[\rho''\cos\omega'' - p\sin\omega'' - \frac{\mu}{2a}\omega'' + \frac{2\mu}{a}(z - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}z) - C\right],$$

ce qui peut s'écrire, toujours en négligeant les termes du second ordre,

$$\left(\frac{d\omega''}{dt}\right)^2\left(1 + 2\frac{\rho''-\rho}{\rho} - 2\frac{dp}{d\omega''}\right)$$
$$= \frac{2\pi^2\lambda}{\rho}\left[\cos\omega'' - \frac{\rho''-\rho}{\rho}\cos\omega'' - \frac{p}{\rho}\sin\omega'' - \frac{\mu\omega''}{2a\rho} - \frac{2\mu}{a\rho}(z - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}z) - C\right].$$

Cette différentielle rentre dans la forme dont j'ai développé l'intégrale dans l'Appendice I. Il suffit donc de développer, suivant les puissances de $\sin\frac{1}{2}\omega''$, les deux expressions

$$f(\omega'') = \frac{\rho''-\rho}{\rho}\cos\omega'' + \frac{p}{\rho}\sin\omega'' + \frac{\mu\omega''}{2a\rho} + \frac{2\mu}{a\rho}(z - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}z),$$
$$f'(\omega'') = \frac{\rho''-\rho}{\rho} - \frac{dp}{d\omega''},$$

et de substituer ensuite les coefficients des puissances paires contenues dans ces développements dans la quatrième formule de l'Appendice I. Pour faciliter autant que possible cette opération, je fais d'abord en sorte que les termes de ces deux expressions qui

contiennent les puissances paires du $\sin\frac{1}{2}\omega'$, les seuls qui doivent rester dans le calcul, ne dépendent que de z seulement. A cet effet, puisque

$$\sin z = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\mu}{T''}}, \qquad \sin z' = \frac{1}{2a}\sqrt{\mu},$$

on tire de (23), en y supprimant les termes impairs,

$$\rho'' - \rho = 2a[2z - 4\sin z + \sin 2z - 2z' + 4\sin z' - \sin 2z']$$

et, pour le dernier terme de l'expression de $f(\omega'')$,

$$\frac{2\mu}{a}(z - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}z) - 8a\sin^2 z'(z - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}z):$$

les autres termes de $f(\omega'')$ et $f'(\omega'')$ sont à supprimer, car ils ne contiennent que des puissances impaires de $\sin\frac{1}{2}\omega''$.

Mais

$$\frac{\sin^2 z'}{\sin^2 z} = T'' = 1 - 6\sin^2\tfrac{1}{2}\omega'' + 4\sin^2\tfrac{1}{2}u':$$

on peut donc ne considérer comme fonctions de $\frac{1}{\sin^2 z}$ que les deux quantités exprimées au moyen de z, et commencer leur développement par les fonctions analogues en z'; ce développement se continue suivant les puissances de

$$\frac{1}{\sin^2 z} - \frac{1}{\sin^2 z'} = \frac{-6\sin^2\frac{1}{2}\omega'' + 4\sin^2\frac{1}{2}u'}{\sin^2 z'}.$$

En procédant de cette façon, on trouve les valeurs suivantes des coefficients désignés dans l'Appendice I par α'', α^{IV}, β et β''

$$\alpha'' = \frac{a}{\rho}\sin z'(1 - \cos z')\,64\sin^2\tfrac{1}{2}u',$$

$$\alpha^{\text{IV}} = -\frac{a}{\rho}\sin z'(1 - \cos z')\,24,$$

$$\beta = \frac{a}{\rho}\sin z'(1 - \cos z')\,16\sin^2\tfrac{1}{2}u',$$

$$\beta'' = -\frac{a}{\rho}\sin z'(1 - \cos z')\,24.$$

De plus

$$nn = \frac{\pi^2\lambda}{\rho};$$

d'où l'on conclut que la longueur du pendule simple, qui oscille

dans le même temps que le pendule considéré, est égale à

$$\rho + a \sin z'(1 - \cos z') 22 \sin^2 \tfrac{1}{2} u',$$

ou, si l'on exprime z' en fonction de μ et de a,

$$(29) \qquad = \rho + 4\sqrt{\mu}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\mu}{4aa}}\right) \sin^2 \tfrac{1}{2} u'.$$

Dans le second cas, d'après l'équation (27), on a

$$\left(\frac{d\omega''}{dt}\right)^2 \left(1 + 2\,\frac{\rho'' - \rho}{\rho} + \frac{2\,dp}{\rho\, d\omega''}\right)$$
$$= \frac{2\pi^2 \lambda}{\rho}\left[\cos\omega'' + \frac{\rho'' - \rho}{\rho}\cos\omega'' - \frac{p}{\rho}\sin\omega'' - \frac{4\sqrt{\mu\,\mathrm{T}''}}{\rho}\left(1 - \cos\frac{\omega' - \omega''}{4}\right) - \mathrm{C}\right]$$

ou bien

$$f(\omega'') = \frac{\rho'' - \rho}{\rho}\cos\omega'' - \frac{p}{\rho}\sin\omega'' - \frac{4\sqrt{\mu\,\mathrm{T}''}}{\rho}\left(1 - \cos\frac{\omega' - \omega''}{4}\right),$$
$$f'(\omega'') = \frac{\rho'' - \rho}{\rho} + \frac{dp}{\rho\, d\omega''}.$$

Mais, dans ce cas, on sait que

$$\rho'' - \rho = 2a\left(\sin\tfrac{1}{2}\omega' - \sin\frac{\omega' - \omega''}{2}\right)$$
$$- 4\sqrt{\frac{\mu}{\mathrm{T}''}}\left(1 - \cos\frac{\omega' - \omega''}{4}\right) + 4\sqrt{\mu}\left(1 - \cos\frac{\omega'}{4}\right),$$
$$p = a\cos\frac{\omega' - \omega''}{2} - 2\sqrt{\frac{\mu}{\mathrm{T}''}}\sin\frac{\omega' - \omega''}{4},$$
$$\mathrm{T}'' = 3\cos\omega'' - 2\cos u'.$$

Si l'on opère ces substitutions dans les expressions de $f(\omega'')$ et $f'(\omega'')$, et que l'on développe alors, suivant les puissances de $\sin\frac{1}{2}\omega''$, on obtient

$$\alpha'' = -\frac{a}{\rho}\sin\frac{\omega'}{2} + \frac{\sqrt{\mu}}{\rho}\left[\cos\frac{\omega'}{4} + \left(32 - 36\cos\frac{\omega'}{4}\right)\sin^2\frac{1}{2}u'\right],$$
$$\alpha^{\mathrm{IV}} = -\frac{3}{4}\,\frac{a}{\rho}\sin\frac{\omega'}{2} + \frac{\sqrt{\mu}}{\rho}\left(-12 + \frac{287}{16}\cos\frac{\omega'}{4}\right),$$
$$\beta = \frac{1}{2}\,\frac{a}{\rho}\sin\frac{\omega'}{2} + \frac{\sqrt{\mu}}{\rho}\left[-\frac{1}{2}\cos\frac{\omega'}{4} + \left(8 - 7\cos\frac{\omega'}{4}\right)\sin^2\frac{1}{2}u'\right],$$
$$\beta'' = \frac{3}{4}\,\frac{a}{\rho}\sin\frac{\omega'}{2} + \frac{\sqrt{\mu}}{\rho}\left(-12 + \frac{113}{16}\cos\frac{\omega'}{4}\right).$$

Il résulte de là, d'après la formule (4) de l'Appendice I, que la

longueur du pendule simple équivalent est

$$(30)\quad \left\{ \begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2} a \sin\frac{\omega'}{2} - \sqrt{\mu} \cos\frac{\omega'}{4} \\ &\quad + \left[\frac{3}{16} a \sin\frac{\omega'}{2} - \sqrt{\mu}\left(11 - \frac{735}{64} \cos\frac{\omega'}{4} \right) \right] \sin^2 \frac{1}{2} u'. \end{aligned} \right.$$

13. L'hypothèse faite au début du n° 11, à savoir que le pendule commence son mouvement en partant de l'état d'équilibre, a eu pour résultat d'abréger beaucoup le calcul. En effet, cette hypothèse fait évanouir deux constantes arbitraires contenues dans l'intégrale générale des équations. Par là, tous les termes dont les périodes diffèrent de celles qui sont déterminées par les expressions (29) et (30) disparaissent du calcul. Le même fait se produit d'ailleurs toutes les fois qu'un système de points matériels a été amené, avant le début du mouvement, à l'état d'équilibre par rapport à tous les mouvements possibles, à l'exception d'un seul. Ces termes qui disparaissent ont des périodes dont les durées dépendent des forces perturbatrices et sont, par suite, beaucoup plus courtes que la durée de la période principale du mouvement pendulaire, la seule que j'aie déterminée ici. Ces termes occasionnent une sorte de trépidation du pendule, qui doit toujours se produire, quand le commencement de l'oscillation ne se fait pas exactement dans les conditions que j'ai supposées. Il est en réalité difficile de s'assurer que, dans une série d'oscillations du pendule, les conditions voulues au début du mouvement sont exactement remplies; mais il serait plus difficile encore de déterminer les valeurs initiales de $\frac{d\rho''}{dt}$ et de $\frac{dp}{dt}$, qui dépendent de circonstances purement accidentelles, lorsqu'on a pris les précautions convenables pour mettre le pendule en mouvement. On doit conclure de là que le mouvement du pendule reste indéterminé, dans une certaine mesure. Mais cette indétermination n'a pas d'influence sur les expériences; car, d'une part, la petitesse des périodes des termes dont il s'agit montre qu'ils ne modifieraient pas sensiblement la durée d'oscillation déduite d'un intervalle de temps qui embrasse un très grand nombre de ces oscillations; et, d'autre part, la résistance de l'air annule très vite ces termes à courte période, de telle sorte que, peu d'instants après le début d'une série d'observations,

le pendule arrive à réaliser la condition qui sert de base au calcul. Cette dernière remarque s'applique à tous les termes à courte période; elle s'applique donc aussi aux termes qui résulteraient de l'extensibilité du fil et des rotations des diverses pièces du pendule autour de leur axes principaux respectifs.

APPENDICE III.

Table des valeurs d'un battement de l'horloge P, exprimées en temps moyen

(Cette Table, que je ne reproduis pas, donne les valeurs de a et de b, depuis $k = 45^m$ jusqu'à $k = 65^m$.) [1]

Si l'intervalle de temps k de l'horloge R est égal à l'intervalle de temps $k - 1^s$ de l'horloge P, et si la première retarde par jour de s sur le temps sidéral, la valeur d'un battement de l'horloge P, exprimée en temps moyen, est

$$a + bs.$$

APPENDICE IV.

Influence de la température sur l'appareil du pendule.

TABLE DES TEMPÉRATURES VRAIES QUI CORRESPONDENT AUX INDICATIONS DES TROIS THERMOMÈTRES e', e'', e''' [2].

Indications des thermomètres.	Températures vraies. e'.	e''.	e'''
°	°	°	°
0	− 0,23	− 0,39	− 0,44
5	+ 4,59	+ 4,53	+ 4,37
10	9,44	9,46	9,30
15	14,25	14,40	14,16
20	19,07	19,16	19,08
25	23,97	24,06	24,03
30	+28,90	+28,92	+28,96

(1) *Voir* Tome IV de ce Recueil, p. 141.

(2) Dans le Mémoire original, cette Table est construite de degré en degré.

L'influence de la température sur les mesures du pendule court a été calculée comme il suit. Le support fixe, sur lequel repose le cylindre d'acier *i*, est à 521 lignes au-dessus du bas de l'armoire du pendule; le cylindre a 46 lignes de longueur; la sphère du cylindre de déroulement, qui repose sur sa base supérieure, a 3 lignes de rayon et son centre est à une élévation de 570 lignes. Le point de la barre de fer où est assujetti le cylindre creux en métal de cloche, qui contient la vis micrométrique et le levier de contact, est à $430^{l},5$ au-dessous du support fixe, soit à $90^{l},5$ d'élévation. La longueur de *c* est de $51^{l},5$; son extrémité inférieure est donc à une hauteur de 39 lignes. Les dilatations de ces diverses parties, c'est-à-dire du cylindre d'acier *i* et de la sphère qu'il supporte, du fer de la barre entre le support fixe et le point où est assujetti le cylindre creux, et enfin de ce cylindre creux lui-même, augmentent la distance du levier de contact au point de suspension. Les dilatations des autres parties de l'appareil se produisent en partant de la base inférieure du cylindre creux, et agissent par suite en sens inverse. Ces parties sont : la vis micrométrique en acier ($12^{l},5$ de longueur); l'écrou en cuivre de cette vis (6 lignes) : le cylindre d'acier qui porte le levier de contact (48 lignes); enfin le rayon de la sphère du pendule ($12^{l},1$), qui entre aussi dans le calcul, les dilatations thermométriques devant être prises jusqu'au centre d'oscillation.

Soient a, f, m, l, les coefficients de dilatation de l'acier, du fer, du métal de cloche et du laiton; on a, pour les diverses parties.

	Hauteur h du point milieu de la partie considérée.	Dilatation pour 1° centigrade.
	l	
Sphère du cylindre de déroulement...........	568,5	$+\ 3,0\ a$
Cylindre *i*, qui supporte cette sphère.........	544,0	$+\ 46,0\ a$
Barre de fer..............................	305,75	$+\ 430,5\ f$
Cylindre creux de l'appareil micrométrique . .	64,75	$-\ 51,5\ m$
Vis micrométrique..........................	45,25	$-\ 12,5\ a$
Écrou de cette vis...........................	53,75	$-\ 6,0\ l$
Cylindre d'acier portant le levier de contact. . .	81,5	$-\ 48,0\ a$
Rayon de la sphère du pendule	111,5	$-\ 12,1\ l$

Si l'on prend les températures de ces diverses pièces par la for-

mule de l'art. 7,

$$\frac{584 - h}{388}e' + \frac{h - 196}{388}e'',$$

et si l'on remplace les coefficients de dilatation par leurs valeurs,

$a = 0,00001898$ (Troughton),
$f = 0,00001400$ (Borda),
$m = 0,00001908$ (Berthoud),
$l = 0,00001878$ (Lavoisier et Laplace),

on obtient la variation, pour chaque degré du thermomètre, de la distance du point de suspension au levier de contact, diminuée du rayon de la sphère.

$$= 0^l,0035153\,e' + 0^l,0018979\,e'',$$
$$= 0^l,0054132\,(0,6494\,e' + 0,3506\,e'').$$

Lorsqu'au contraire la toise repose sur le cylindre i, et le cylindre de déroulement sur l'extrémité supérieure de la toise, on a

Pour la sphère du cylindre de déroulement.	1432,5	$-3,0a$
Pour la toise	999,0	$-864,0f$

il faut y ajouter les effets de la température calculés pour le pendule court, à l'exception du premier. Pour les deux parties qui s'introduisent dans ce cas, on prend la température donnée par la formule

$$= \frac{1292 - h}{708}e'' + \frac{h - 584}{708}e'''.$$

On obtient ainsi la variation pour chaque degré du thermomètre

$$= -0^l,0000014\,e' + 0^l,0040339\,e'' + 0^l,0058162\,e'''$$

ou, si l'on remplace e' par e'', ce qui peut se faire, vu la faiblesse du coefficient de e',

$$+ 0^l,0040325\,e'' + 0^l,0058162\,e''' = 0^l,0098487\,(0,4095\,e'' + 0,5905\,e''').$$

Le coefficient donné ici ne concorde pas rigoureusement avec le coefficient plus exact indiqué à l'art. 7, mais cela provient de ce que l'on a pris ici la longueur de la toise trop grande de $0^l,16$, quantité dont cette toise est plus courte que 864 lignes à la température de la glace fondante.

Je donne ici une Table des longueurs de la toise et des variations correspondantes de F [1] :

---

[1] Dans le Mémoire original, cette Table est construite de degré en degré.

Températures.	Toise.	Variation de F.
°	l	l
0	863,83917	0,00000
2	85887	0,01083
4	87857	0,02165
6	89826	0,03248
8	91796	0,04331
10	93765	0,05413
12	95735	0,06496
14	97704	0,07578
16	99674	0,08661
18	864,01643	0,09744
20	03613	0,10826
22	05582	0,11909
24	07552	0,12992
26	09522	0,14074
28	11491	0,15157
30	13461	0,16240

APPENDICE V.

Certificat de comparaison de la toise (1).

Le 31 *août* 1823, *nous avons comparé*, *M.* Zahrtmann *et moi, la toise en de fer que M.* Fortin *a construite pour M.* Bessel *de Königsberg, à l'étalon en fer de l'observatoire connu sous le nom de* Toise du Pérou. *Il nous a semblé que la Règle de M.* Bessel est plus courte *que l'étalon de l'observatoire de* $\frac{1}{1278}$ *de ligne* (*de un douze cent soixante dix-huitième de ligne*).

signé : F. Arago, Zahrtmann.

APPENDICE VI.

Mouvement d'un pendule dans un milieu fluide.

Si, d'après ce qui a été dit à l'art. 13, on prend pour la somme des particules du fluide qui participent au mouvement, multipliées

(1) Ce certificat est donné en français dans le Mémoire de Bessel.

chacune par le carré de sa vitesse, l'expression

$$m'u'u'nn[b^{(0)} + b^{(2)}\cos(2nt + B^{(2)}) + b^{(4)}\cos(4nt + B^{(4)}) + \ldots],$$

et, si l'on ne tient pas compte de la perte de force vive résultant du choc du pendule avec des molécules sans cesse renouvelées du milieu fluide, cette perte de force vive n'ayant aucune influence sur la durée d'une oscillation entière, on a l'équation suivante du mouvement :

$$\begin{aligned} c = m(\mu + ss)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 &- 2\pi^2\lambda(ms - m's')\cos u \\ &+ m'u'u'nn[b^{(0)} + b^{(2)}\cos(2nt + B^{(2)}) + \ldots] \end{aligned}$$

ou

$$c = \left(\frac{du}{dt}\right)^2 - 2n'n'[\cos u - u'u'\zeta][b^{(0)} + b^{(2)}\cos(2nt + B^{(2)}) + \ldots],$$

en posant

$$n'n' = \frac{\pi^2\lambda(ms - m's')}{m(\mu + ss)}$$

et

$$\zeta = \frac{m'nn}{2\pi^2\lambda(ms - m's')}.$$

Si l'on compare cette équation à celle que l'on a étudiée dans l'Appendice I, on a

$$\begin{aligned} &f(u) = -u'u'\zeta[b^{(0)} + b^{(2)}\cos(2nt + B^{(2)}) + \ldots], \\ &f'(u) = 0; \end{aligned}$$

la quantité désignée là par n est ici représentée par n'. On peut donc obtenir la durée d'une oscillation du pendule par la troisième formule de cet Appendice. Mais, comme on ne sait point encore si $b^{(0)}$, $b^{(2)}$, ..., $B^{(2)}$, ... sont des constantes, ou dépendent de l'étendue des oscillations, on ne peut déterminer complètement la partie de cette durée qui dépend du carré ou des puissances supérieures de l'amplitude. Je laisserai donc de côté, dans cette formule, tout ce qui n'a d'influence que sur cette partie. La formule se réduit alors à

$$\frac{\pi}{n'} + \frac{1}{n'}\int_0 \frac{d\,\dfrac{f(u) - f(0)}{u}}{\sqrt{u'u' - uu}},$$

et, comme il n'y a à déterminer ici que l'effet qui est de l'ordre

des forces perturbatrices elles-mêmes, on peut prendre pour u une valeur approchée où l'on ne tienne pas compte de ces perturbations, c'est-à-dire, en supposant le temps t compté à partir du passage du pendule par la verticale

$$u = u' \sin n't, \qquad \sqrt{u'u' - uu} = u' \cos n't.$$

Pour abréger, posons $z = n't$; l'expression de la durée d'oscillation sera la suivante :

$$\frac{r}{2n'}\int \frac{d\left[\dfrac{b^{(2)}\cos B^{(2)}(1-\cos 2z) + b^{(2)}\sin B^{(2)}\sin 2z + b^{(4)}\cos B^{(4)}(1-\cos 4z) + \ldots}{\sin z}\right]}{\cos z}.$$

L'intégrale doit être prise de $z = -\frac{1}{2}\pi$ à $z = +\frac{1}{2}\pi$.

Les intégrales définies qui se présentent ici ont les formes suivantes :

$$\int \frac{d\,\dfrac{1-\cos 2hz}{\sin z}}{\cos z} \quad \text{et} \quad \int \frac{d\,\dfrac{\sin 2hz}{\sin z}}{\cos z}.$$

La première peut s'écrire, si l'on effectue la différentiation indiquée

$$= 4h\int \frac{\sin 2hz}{\sin 2z}\,dz - \int \frac{1-\cos 2hz}{\sin^2 z}\,dz;$$

mais on a

$$\frac{\sin 2hz}{\sin 2z} = \cos(2h-2)z + \cos(2h-6)z$$
$$+ \cos(2h-10)z + \ldots + \cos(-2h+2)z,$$
$$\frac{1-\cos 2hz}{\sin^2 z} = 2h + 4(h-1)\cos 2z + 4(h-2)\cos 4z + \ldots + 4\cos(2h-2)z;$$

d'où il résulte que l'intégrale $\int \frac{\sin 2hz}{\sin 2z}\,dz$, prise entre les deux limites indiquées, se réduit à zéro si h est un nombre pair, et devient égale à π si h est un nombre impair. On voit aussi que

$$\int \frac{1-\cos 2hz}{\sin^2 z}\,dz = 2h\pi.$$

Donc

$$\int \frac{d\,\dfrac{1-\cos 2hz}{\sin z}}{\cos z} = 2h\pi[1-(-1)^h] - 2h\pi = (-1)^{h+1}2h\pi.$$

La seconde intégrale définie, si l'on y applique l'intégration par

parties, devient

$$\frac{2\sin 2hz}{\sin 2z} - \int \frac{\sin 2hz}{\cos^2 z}\,dz;$$

l'expression donnée plus haut pour la première partie montre qu'elle s'annule quand on la prend entre les limites indiquées. La seconde partie s'annule également, car l'élément différentiel y prend des valeurs égales et de signes contraires pour $-z$ et $+z$. On a donc

$$\int \frac{d\,\dfrac{\sin 2hz}{\sin z}}{\cos z} = 0.$$

Portons ces valeurs des intégrales définies dans l'expression de la durée d'oscillation; la valeur de cette durée devient

$$= \frac{\pi}{n'} + \frac{2\zeta\pi}{n'}\left(b^{(2)}\cos B^{(2)} - 2b^{(4)}\cos B^{(4)} + 3b^{(6)}\cos B^{(6)} - \ldots\right).$$

Si l'on remplace nn par $n'n'$ dans l'expression ζ, ce qui est permis, on a

$$\zeta = \frac{m'}{2m(\mu + ss)}.$$

Si maintenant on remplace n' par sa valeur et si l'on désigne par C le développement

$$b^{2}\cos B^{(2)} - 2b^{(4)}\cos B^{(4)} + 3b^{(6)}\cos B^{(6)} - \ldots,$$

l'expression de la durée d'oscillation devient

$$\sqrt{\frac{m(\mu + ss)}{\lambda(ms - m's')}}\left[1 + \frac{m'C}{m(\mu + ss)}\right].$$

En d'autres termes, la longueur du pendule simple équivalent au pendule composé, c'est-à-dire le carré de la durée multipliée par λ, a pour valeur

$$\frac{\mu + \dfrac{2m'}{m}C + ss}{s\left(1 - \dfrac{m's'}{ms}\right)}.$$

Il résulte de ces calculs que la présence d'un milieu fluide de très faible densité autour du pendule n'a pas d'autre effet sur la durée des oscillations très petites, que de diminuer un peu l'action de la pesanteur et d'augmenter le moment d'inertie du pendule.

Si l'étendue des mouvements du fluide est proportionnelle aux amplitudes des oscillations, l'augmentation du moment d'inertie est à très peu près constante; dans le cas contraire, elle dépend de l'amplitude.

APPENDICE VII.

Détermination des diverses pièces qui composent les différents pendules employés dans les expériences, et calcul des pendules ainsi composés.

Le poids qui a servi d'unité aux pesées est la livre prussienne de 7680 grains; d'après les mesures très précises de M. Eytelwein, cette livre pèse 467,7112 grammes. L'exemplaire dont je me suis servi est la livre normale, en laiton, de la Commission actuelle d'étalonnement. J'ai obtenu les divisions de la livre en comparant d'abord entre eux, de façon très exacte, des poids sensiblement justes de 12, 6, 3, 2 onces, 1 once, et de 240, 120, 60, ... grains. En d'autres termes, je déterminais les erreurs relatives de ces poids; pesant ensuite la livre exacte au moyen de ces poids, j'avais les valeurs absolues de chacun d'eux.

La sphère de laiton du pendule, en y comprenant la petite pince qui y était vissée pour recevoir le fil, pesait 11418,15 grains; la pince seule 19,72. Dans l'eau distillée, à + 15°,8 C., ces mêmes pièces pesaient ensemble 10025,07, et la dernière seule 17,30; la hauteur barométrique étant de 341,17 lignes, et la température indiquée par le thermomètre du baromètre, 12°,5. D'après ces données, on trouve, en ramenant au vide, 10023,63 et 17,30. Il en résulte que la sphère, réunie à la pince à vis, déplaçait 1394,52 grains d'eau à la température indiquée, et que la pince seule en déplaçait 2,42; la différence de ces deux volumes donne un déplacement de 1392^{gr},10 d'eau.

D'après les expériences de M. Hallström (*Dissertatio de mutationibus voluminis aquæ destillatæ*. Aboæ, 1802), la densité maximum de l'eau étant prise égale à 1, la densité de l'eau à 15°,8 est 0,9993053. Ainsi le volume occupé par la sphère à 15°,8 contiendrait 1393,067 grains d'eau au maximum de densité, et son

volume à la température de la glace, 1391,826 grains. De là on a conclu le poids spécifique donné à l'art. 15.

Un *kilogramme* est le poids d'un décimètre cube d'eau prise au maximum de densité et pesée dans le vide; on en déduit pour le poids d'une ligne cube d'eau, toujours au maximum de densité,

$$\frac{1000 \times 7680}{467,7112(44,32959)^3} = 0,1884961 \text{ grains.}$$

De cette façon, on évalue à 7383,84 lignes cubes la différence des volumes occupés à 0° par la sphère réunie à la petite pince à vis, et par cette pince seule. Ce volume est plus petit que le volume total de la sphère; car, au point où la pince qui saisit le fil doit être vissée dans la sphère, on a abattu une petite calotte sphérique, dont la base est un cercle de 2 lignes de rayon. Il manque encore au volume total de la sphère, l'espace que doit remplir la vis de la pince. Cette vis peut être assimilée à un cylindre de $1^l,25$ de hauteur et de $0^l,75$ de rayon de base. Soit a le rayon de la sphère; on a donc

$$7383,84 = \tfrac{2}{3}\pi a^3\left[1 + \left(1 + \frac{2}{aa}\right)\sqrt{1 - \frac{4}{aa}}\right] - \frac{45}{64}\pi.$$

De cette équation, on tire le rayon de la sphère pour la température de la glace fondante

$$a = 12^l,082.$$

Calcul des éléments des pendules de la première série d'expériences.

Je considérerai les pendules comme composés de huit parties. Je désignerai, pour chacune de ces parties, le poids par m, la distance du centre de gravité de cette partie au point de suspension par s, et par μ le moment d'inertie par rapport à un axe horizontal passant par ce centre de gravité.

1° La petite lame de laiton, dont j'appelle r la longueur et dont le poids est égal à $0,01759\, r$,

$$m^{(1)} = 0,01759\, r, \qquad s^{(1)} = \tfrac{1}{2}\, r, \quad \mu^{(1)} = 0,001466\, r^3.$$

2° L'ensemble de la pince dans laquelle est fixée la lame de laiton et de la pince à vis qui saisit l'extrémité supérieure du fil, pèse $40^g,49$; j'ai trouvé que son centre de gravité était placé à $3^l,56$

au-dessous de l'extrémité inférieure de la petite lame de laiton, et que son moment d'inertie doit être évalué à 157.

$$m^{(2)} = 40,49; \qquad s^{(2)} = r + 3,56; \qquad \mu^{(2)} = 157.$$

3° Le fil, dont j'appellerai r' la longueur, et dont le poids est, pour les deux pendules, respectivement $10^{g},95$ et $3^{g},58$. La pince qui le tient suspendu et celle qui termine la petite lame de laiton, vissées ensemble, ont une longueur de $6^{l},5$. Le fil traverse la première pince de part en part, et il est coupé au ras de l'extrémité supérieure de la vis, qui est distante de $3^{l},25$ de la pointe conique de cette pince. La même disposition existe à l'autre bout du fil qui est vissé dans la sphère. Le point où commence le fil est donc à une distance $r + 3^{l},25$ du centre du mouvement, et, dans le cas du long pendule, on a

$$m^{(3)} = 10,95. \qquad s^{(3)} = r + 3,25 + \tfrac{1}{2} r'. \qquad \mu^{(3)} = \frac{10,95}{12} \cdot r'r';$$

dans le cas du pendule court,

$$m^{(3)} = 3,58, \qquad s^{(3)} = r + 3,25 + \frac{1}{2} r', \qquad \mu^{(3)} = \frac{3,58}{12} r'r'.$$

4° Le cylindre des coïncidences. Pour le pendule long, on a

$$m^{(4)} = 3,81, \qquad s^{(4)} = 1277,8, \qquad \mu^{(4)} = 2,$$

et, pour le pendule court,

$$m^{(4)} = 3,69, \qquad s^{(4)} = 413,8. \qquad \mu^{(4)} = 2.$$

5° La pince à vis de l'extrémité inférieure du fil. Son centre de gravité est distant de $1^{l},83$ du bout de la vis et par conséquent aussi du bout du fil,

$$m^{(5)} = 19,72, \qquad s^{(5)} = r + 1,42 + r', \qquad \mu^{(5)} = 19.$$

6° La calotte sphérique enlevée sur la surface de la sphère, que je considère ici comme une masse négative. Le volume d'une calotte sphérique, dont la base, vue du centre d'une sphère de rayon a, sous-tend un angle 2φ, est donné par la formule

$$\tfrac{4}{3} a^3 \pi \sin^4 \tfrac{1}{2} \varphi (3 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \varphi);$$

donc son poids, en désignant par Δ le poids d'une ligne cube du

métal qui la compose, a pour expression

$$\tfrac{4}{3}\Delta a^3\pi \sin^4\tfrac{1}{2}\varphi\left(3-2\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi\right).$$

La distance du centre de gravité à la base est

$$a\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi\,\frac{2-\sin^2\frac{1}{2}\varphi}{3-2\sin^2\frac{1}{2}\varphi}.$$

Le moment d'inertie, rapporté au centre de gravité, est, par conséquent,

$$\frac{4\Delta a^5\pi\sin^6\frac{1}{2}\varphi}{3-2\sin^2\frac{1}{2}\varphi}\left(2-\tfrac{11}{3}\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi-\tfrac{12}{5}\sin^4\tfrac{1}{2}\varphi-\tfrac{3}{5}\sin^6\tfrac{1}{2}\varphi\right).$$

Si, dans ces formules, on fait

$$\sin\varphi=\frac{2}{12,082}\qquad\text{et}\qquad\Delta=8,19\times 0,1884961=1^{g},5437,$$

on trouve $1^{g},63$ pour le poids, $0^{l},06$ pour la distance du centre de gravité à la base, et 1 pour le moment d'inertie. On prendra donc, pour les éléments de cette calotte sphérique,

$$m^{(6)}=-1,63,\qquad s^{(6)}=r+1,94+r',\qquad \mu^{(6)}=-1.$$

7° L'évidement pratiqué dans la sphère pour y loger la pince à vis. Cet évidement a une profondeur de 4 lignes, comptée à partir de la base de la calotte sphérique, et un rayon de base de $0^{l},75$. L'extrémité du fil étant à $r+3,25+r'$ du centre du mouvement, et à $1^{l},25$ de la base de la calotte, on trouve

$$m^{(7)}=-10,91,\qquad s^{(7)}=r+4+r',\qquad \mu^{(7)}=-16.$$

8° La boule, considérée comme une sphère complète. Sa masse est $11398,43+1,63+10,91=11410,97$ grains; son centre est distant de $11,9143$ lignes de la base de la calotte; on a donc

$$m^{(8)}=11410,97,\qquad s^{(8)}=r+13,91+r',\qquad \mu^{(8)}=666285.$$

Je ne donnerai pas ici le détail des procédés que j'ai employés pour trouver le centre de gravité et le moment d'inertie des pièces 2 et 5. Il me faudrait pour cela entrer dans de longues explications sur les formes de ces pièces, et je crois pouvoir omettre ces explications, l'influence de ces pièces sur le résultat final des expériences étant absolument insignifiante.

La longueur du pendule simple équivalent au pendule composé, considéré comme un corps rigide, est

$$l = \frac{\Sigma\mu + \Sigma mss}{\Sigma ms}$$

ou, si l'on isole, dans cette expression, le terme relatif à la sphère

$$l = s^{(8)} + \frac{\Sigma\mu + \Sigma mss - s^{(8)}\,\Sigma ms}{m^{(8)} s^{(8)} + \Sigma ms},$$

Σmss et Σms se rapportant aux sept premières parties du pendule composé. Si l'on pose

$$l = s^{(8)} + c,$$

on a

$$c = \frac{\Sigma\mu - m^{(1)} s^{(1)}(s^{(8)} - s^{(1)}) - m^{(2)} s^{(2)}(s^{(8)} - s^{(2)}) - \ldots}{m^{(8)} s^{(8)} + m^{(1)} s^{(1)} + m^{(2)} s^{(2)} + \ldots}.$$

Cette expression contient, outre les longueurs et les poids connus, les longueurs r et r' de la petite lame de laiton et du fil. La valeur de r se tire de la distance, mesurée au moment des observations et inscrite aux Tableaux d'expériences, du centre de gravité de la pince supérieure au point de suspension du pendule, et elle est toujours comprise entre $14^{l},5$ et 15 lignes ; je la désignerai par $14,5 + i$. Quant à r', cette longueur n'est pas mesurée ; il faut l'obtenir au moyen de la longueur totale du pendule. Soit $F + h$ cette longueur totale, telle qu'elle est donnée dans les Tableaux d'expériences, et dans laquelle $F = 442^{l},40$; désignons h, dans le cas du long pendule, par $862,6 + i'$, et, dans le cas du pendule court, par $-1,4 + i'$. On a alors, en se reportant aux expressions des distances des centres de gravité des pièces 2 et 8 à l'axe du mouvement :

Long pendule.	Pendule court.
$r + 3,56 = 14,5 + i$	$r + 3,56 = 14,5 + i$
$r + r' + 13,91 = 1305,00 + i'$	$r + r' + 13,91 = 441,00 + i'$

ou bien

$r = 10,94 + i$	$r = 10,94 + i$
$r' = 1280,15 + i' - i$	$r' = 416,15 + i' - i$

Si l'on substitue ces expressions de r et r', on trouve, pour le

long pendule,

$$m^{(1)} = 0,19$$
$$m^{(2)} = 40,49$$
$$m^{(3)} = 10,95$$
$$m^{(4)} = 3,81$$
$$m^{(5)} = 19,72$$
$$m^{(6)} = 1,63$$
$$m^{(7)} = -10,91$$
$$m^{(8)} = 11410,97$$

$$s^{(8)} - s^{(1)} = 1299,53 - \tfrac{1}{2}i - i'$$
$$s^{(8)} - s^{(2)} = 1290,50 - i + i'$$
$$s^{(8)} - s^{(3)} = 650,735 - \tfrac{1}{2}i - \tfrac{1}{2}i'$$
$$s^{(8)} - s^{(4)} = 27,20 + i'$$
$$s^{(8)} - s^{(5)} = 12,49$$
$$s^{(8)} - s^{(6)} = 11,97$$
$$s^{(8)} - s^{(7)} = 9,91$$

$$s^{(1)} = 5,47 + \tfrac{1}{2}i$$
$$s^{(2)} = 14,50 - i$$
$$s^{(3)} = 654,265 + \tfrac{1}{2}i + \tfrac{1}{2}i'$$
$$s^{(4)} = 1277,80$$
$$s^{(5)} = 1292,51 + i'$$
$$s^{(6)} = 1293,03 + i'$$
$$s^{(7)} = 1295,09 - i'$$
$$s^{(8)} = 1305,00 - i'$$

$$\mu^{(1)} = 0$$
$$\mu^{(2)} = 157$$
$$\mu^{(3)} = 1495390 + 2336,3(i' - i)$$
$$\mu^{(4)} = 2$$
$$\mu^{(5)} = 19$$
$$\mu^{(6)} = 1$$
$$\mu^{(7)} = -16$$
$$\mu^{(8)} = 666285$$

et pour le pendule court,

$$m^{(1)} = 0,19$$
$$m^{(2)} = 40,49$$
$$m^{(3)} = 3,58$$
$$m^{(4)} = 3,69$$
$$m^{(5)} = 19,72$$
$$m^{(6)} = -1,63$$
$$m^{(7)} = -10,91$$
$$m^{(8)} = 11410,97$$

$$s^{(8)} - s^{(1)} = 435,53 - \tfrac{1}{2}i - i'$$
$$s^{(8)} - s^{(2)} = 426,50 - i + i'$$
$$s^{(8)} - s^{(3)} = 218,735 - \tfrac{1}{2}i - \tfrac{1}{2}i'$$
$$s^{(8)} - s^{(4)} = 27,20 \quad i'$$
$$s^{(8)} - s^{(5)} = 12,49$$
$$s^{(8)} - s^{(6)} = 11,97$$
$$s^{(8)} - s^{(7)} = 9,91$$

$$s^{(1)} = 5,47 + \tfrac{1}{2}i$$
$$s^{(2)} = 14,50 + i$$
$$s^{(3)} = 222,265 - \tfrac{1}{2}i + \tfrac{1}{2}i'$$
$$s^{(4)} = 413,80$$
$$s^{(5)} = 428,51 - i'$$
$$s^{(6)} = 429,03 + i'$$
$$s^{(7)} = 431,09 - i'$$
$$s^{(8)} = 441,00 + i'$$

$$\mu^{(1)} = 0$$
$$\mu^{(2)} = 157$$
$$\mu^{(3)} = 51666 + 248,3(i' - i$$
$$\mu^{(4)} = 2$$
$$\mu^{(5)} = 19$$
$$\mu^{(6)} = -1$$
$$\mu^{(7)} = -16$$
$$\mu^{(8)} = 666285$$

D'après cela, on a, pour le long pendule,

$$c = -0^{\mathrm{s}},23768 - 0,00363\,i - 0,00051\,i',$$

et, pour le pendule court,

$$c = -0^{\mathrm{s}},03992 - 0,00337\,i - 0,00064\,i'.$$

Cependant ces formules ne sont pas absolument rigoureuses, car elles supposent que le pendule est un corps rigide, et Laplace a déjà remarqué qu'on ne peut négliger les rotations des diverses pièces les unes par rapport aux autres, aussi longtemps que le fil, très flexible, ne leur oppose pas un obstacle réel. Mais on se convaincra facilement que les pièces 1 jusqu'à 4, considérées à ce point de vue, ne peuvent avoir d'influence sensible; pour les autres, qui forment un ensemble solide, le cas n'est plus le même; et il n'est pas douteux que la masse de ce corps, très grande en comparaison de la rigidité du fil, ne suffise à produire une flexion réelle de ce fil. Pour calculer l'influence de cette flexion sur les résultats, je supposerai que le corps considéré est fixé à un fil dépourvu de masse, de longueur a. Soit u l'angle du fil avec la verticale, et u' l'angle avec la verticale d'une ligne droite joignant le point d'attache du corps et le centre de gravité de ce même corps. J'appelle r la distance d'un élément de masse dm du corps au point d'attache, et ψ l'angle de r, dans le plan du mouvement, avec la droite qui passe par le centre de gravité. Si les coordonnées sont comptées, les x dans le sens vertical, les y suivant l'horizontale, l'équation générale du mouvement d'un corps autour d'un axe fixe donne la relation suivante :

$$0 = \int dm \left[\left(\frac{d^2 x}{dt^2} + \pi^2 \lambda \right) \delta x - \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y \right].$$

Si l'on y substitue les valeurs

$$x = a \cos u + r \cos(u' + \psi),$$
$$y = a \sin u + r \sin(u' + \psi)$$

et si l'on égale séparément à zéro les termes qui contiennent δu et $\delta u'$ en facteurs, on obtient

$$0 = \int dm \left[a \frac{d^2 u}{dt^2} - r \cos(u' - u + \psi) \frac{d^2 u'}{dt^2} \right.$$
$$\left. + r \sin(u' - u + \psi) \left(\frac{du'}{dt} \right)^2 + \pi^2 \lambda \sin u \right],$$
$$0 = \int dm \left[ar \cos(u' - u + \psi) \frac{d^2 u}{dt^2} \right.$$
$$\left. + ar \sin(u' - u + \psi) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + rr \frac{d^2 u'}{dt^2} + \pi^2 \lambda r \sin(u' + \psi) \right].$$

Si maintenant on désigne par s la distance du centre de gravité

du corps au point par lequel il est fixé au fil, et par $m\mu$ son moment d'inertie par rapport au centre de gravité, on a

$$\int dm.r\cos(u'-u+\psi)=ms\cos(u'-u),$$

$$\int dm.r\sin(u'-u+\psi)=ms\sin(u'-u),$$

$$\int dm.rr=m(\mu+ss).$$

Les deux équations se transforment donc en celles-ci :

$$0=a\frac{d^2u}{dt^2}+s\cos(u'-u)\frac{d^2u'}{dt^2}-s\sin(u'-u)\left(\frac{du'}{dt}\right)^2+\pi^2\lambda\sin u,$$

$$0=as\cos(u'-u)\frac{d^2u}{dt^2}+as\sin(u'-u)\left(\frac{du}{dt}\right)^2+(\mu+ss)\frac{d^2u'}{dt^2}+\pi^2\lambda s\sin u'.$$

Mais on peut, dans le cas des oscillations très petites, négliger les termes du troisième ordre en u et en u', et il vient

$$0=a\frac{d^2u}{dt^2}+s\frac{d^2u'}{dt^2}+\pi^2\lambda u,$$

$$0=as\frac{d^2u}{dt^2}+(\mu+ss)\frac{d^2u'}{dt^2}+\pi^2\lambda su'.$$

Ces deux équations sont satisfaites par les valeurs

$$u=k\sin(nt+\mathrm{K}),\qquad u'=k'\sin(nt+\mathrm{K}),$$

ce qui donne

$$0=-knna-k'nns+k\pi^2\lambda,$$

$$0=-knnas-k'nn(\mu+ss)+k'\pi^2\lambda s.$$

Si l'on élimine k et k', on obtient l'équation

$$0=\frac{\pi^4\lambda^2}{n^4}-\frac{\pi^2\lambda}{n^2}\left(a+\frac{\mu+ss}{s}\right)+\frac{a\mu}{s},$$

dont la résolution donne

$$\frac{\pi^2\lambda}{nn}=\frac{a+\frac{\mu+ss}{s}}{2}\left[1\pm\sqrt{1-\frac{4as\mu}{(as+\mu+ss)^2}}\right].$$

Si l'on désigne par nn et $n'n'$ les deux valeurs de nn qui résultent de cette équation, on aura

$$u=k\sin(nt+\mathrm{K})+l\sin(n't+\mathrm{L}),$$

$$u'=k'\sin(nt+\mathrm{K})+l'\sin(n't+\mathrm{L}).$$

où, entre les quatre constantes k, k', l et l', existent les relations trouvées plus haut :

$$\frac{k'}{k} = \frac{\pi^2\lambda}{nns} - \frac{a}{s},$$

$$\frac{l'}{l} = \frac{\pi^2\lambda}{n'n's} - \frac{a}{s}.$$

L'intégrale a donc bien le nombre de constantes qui lui convient.

Dans les observations de la durée d'oscillation du pendule, le deuxième terme de l'expression de u est insensible; car il a une période très courte, et il est d'ailleurs bien vite annulé par la résistance de l'air. La durée de l'oscillation est alors celle pendant laquelle nt augmente de π, c'est-à-dire qu'elle est $\frac{\pi}{n}$; et la longueur du pendule simple correspondant sera

$$\frac{\lambda\pi^2}{nn} = \frac{a + \frac{\mu + ss}{s}}{2}\left[1 + \sqrt{1 - \frac{4as\mu}{(as + \mu + ss)^2}}\right].$$

Si le pendule était un corps rigide, la longueur du pendule simple de même durée d'oscillation serait

$$a + s + \frac{\mu}{a + s}.$$

En réalité, elle est, en développant son expression suivant les puissances de μ,

$$a + s + \frac{\mu}{a + s} + \frac{a\mu^2}{s(a + s)^3} - \frac{a\mu^3}{ss(a + s)^4} + \dots$$

Il faut donc, à la valeur de c calculée dans la première hypothèse, ajouter les termes complémentaires

$$\frac{a\mu^2}{s(a + s)^3} - \frac{a\mu^3}{ss(a + s)^4} + \dots$$

Si l'on remplace dans cette formule μ et s par leurs valeurs déduites des données numériques indiquées plus haut, savoir $\mu = 58,50$ et $s = 12,48$, on obtient la correction qu'il faut ajouter à c en raison de la flexibilité du pendule; cette correction est de $+0^{1},00016$ pour le long pendule et de $+0^{1},00137$ pour le pendule court. On a donc, en définitive, pour expression complète des valeurs de c :

Long pendule :

$$c = -0^{l},23752 - 0,00363\,i - 0,00051\,i',$$

Pendule court :

$$c = +0^{l},04129 - 0,00337\,i - 0,00064\,i'.$$

Calcul des pendules de la deuxième série d'expériences.

a. Pendule suspendu à un couteau. — Pour trouver les moments d'inertie du couteau et de sa monture, dont la forme est trop compliquée pour qu'on puisse les calculer avec l'exactitude nécessaire, j'ai fait osciller le couteau et sa monture, d'abord isolément, puis en union avec le cylindre de laiton qui pouvait y être vissé; c'est ce cylindre auquel, dans les expériences, se vissait la pince du fil. Le poids du couteau avec sa monture est de 194,39 grains, et l'ensemble exécutait une oscillation en $2^{s},9042$ de temps moyen, ce qui correspond à une longueur de pendule simple $l = 3718^{l},0$. Quand on y vissait le cylindre, dont le poids était de $26^{g},81$, dont le centre de gravité se trouvait à $7^{l},78$ au-dessous du couteau et dont le moment d'inertie par rapport à un axe passant par son centre de gravité était égal à 92,1, la durée d'oscillation devenait $0^{s},2971$ de temps moyen, et correspondait par suite à une longueur de pendule simple égale $38^{l},91$.

Soit μ le moment d'inertie cherché du couteau et de sa monture et s la distance inconnue du centre de gravité de cet ensemble au couteau, on a les deux équations

$$3718,0 = \frac{\mu + 194.39\,ss}{194,39\,s},$$

$$38,91 = \frac{\mu + 194,39\,ss + 92,1 + 26,81\,(7,78)^2}{194,39\,s + 26,81 \times 7,78}.$$

Leur résolution donne

$$\mu = 6469,$$
$$s = 0^{l},0089502.$$

Il est de plus nécessaire de savoir que, lorsque la pince du fil est vissée dans le cylindre fixé à la monture, le centre de gravité de cette pince se trouve $3^{l},78$ plus bas que celui du cylindre.

Pour le reste, toutes les valeurs des parties du pendule données pour la première série d'expériences servent également pour celle-ci, excepté celles du poids des fils, qui sont un peu différentes parce qu'on a employé de nouveaux fils plus longs. On a donc, pour le long pendule, pour lequel $i' = h - 862,52$:

194,39	$s^{(1)} = 0,00895$	$s^{(8)} - s^{(1)} = 1304,99 + i'$	$\mu^{(1)} = 6469$
26,81	$7,78$	$1297,22 + i'$	92
19,72	$s^{(2)} = 11,56$	$s^{(8)} - s^{(2)} = 1293,44 + i'$	$\mu^{(2)} = 19$
11,06	$s^{(3)} = 652,035 + \frac{1}{2} i'$	$s^{(8)} - s^{(3)} = 652,965 + \frac{1}{2} i'$	$\mu^{(3)} = 1520955 + 2368,0\, i'$
3,81	$s^{(4)} = 1277,80$	$s^{(8)} - s^{(4)} = 27,20 + i'$	$\mu^{(4)} = 2$
19,72	$s^{(5)} = 1292,51 + i'$	$s^{(8)} - s^{(5)} = 12,49$	$\mu^{(5)} = 19$
1,63	$s^{(6)} = 1293,03 + i'$	$s^{(8)} - s^{(6)} = 11,97$	$\mu^{(6)} = -1$
10,91	$s^{(7)} = 1295,09 + i'$	$s^{(8)} - s^{(7)} = 9,91$	$\mu^{(7)} = -16$
11410,97	$s^{(8)} = 1305,00 + i'$		$\mu^{(8)} = 666285$

et pour le pendule court ($i' = h + 1,48$) :

194,39	$s^{(1)} = 0,00895$	$s^{(8)} - s^{(1)} = 440,99 + i'$	$\mu^{(1)} = 6469$
26,81	$7,78$	$433,22 + i'$	92
19,72	$s^{(2)} = 11,56$	$s^{(8)} - s^{(2)} = 429,44 + i'$	$\mu^{(2)} = 19$
3,60	$s^{(3)} = 220,035 + \frac{1}{2} i'$	$s^{(8)} - s^{(3)} = 220,965 + \frac{1}{2} i'$	$\mu^{(3)} = 53074 + 252,4\, i'$
3,69	$s^{(4)} = 413,80$	$s^{(8)} - s^{(4)} = 27,20 + i$	$\mu^{(4)} = 2$
19,72	$s^{(5)} = 428,51 + i'$	$s^{(8)} - s^{(5)} = 12,49$	$\mu^{(5)} = 19$
1,63	$s^{(6)} = 429,03 + i'$	$s^{(8)} - s^{(6)} = 11,97$	$\mu^{(6)} = -1$
10,91	$s^{(7)} = 431,09 + i'$	$s^{(8)} - s^{(7)} = 9,91$	$\mu^{(6)} = -16$
11410,97	$s^{(8)} = 441,00 + i'$		$\mu^{(8)} = 666285$

b. Pendule suspendu à une pince. — La petite lame de laiton avait $6^1,35$ de long. Les autres parties des deux pendules, à l'exception du fil, étaient dans le même état que dans la première série d'expériences. On a donc pour le long pendule ($i' = h - 862,56$) :

0,11	$s^{(1)} = 3,18$	$s^{(8)} - s^{(1)} = 1301,82 + i'$	$\mu^{(1)} = 0$
40,49	$s^{(2)} = 9,91$	$s^{(8)} - s^{(2)} = 1295,09 + i'$	$\mu^{(2)} = 157$
11,06	$s^{(3)} = 651,97 - \frac{1}{2} i'$	$s^{(8)} - s^{(3)} = 653,03 + \frac{1}{2} i'$	$\mu^{(3)} = 1521263 + 2368,2\, i'$
3,81	$s^{(4)} = 1277,80$	$s^{(8)} - s^{(4)} = 27,20 + i'$	$\mu^{(4)} = 2$
19,72	$s^{(5)} = 1292,51 + i'$	$s^{(8)} - s^{(5)} = 12,49$	$\mu^{(5)} = 19$
1,63	$s^{(6)} = 1293,03 + i'$	$s^{(8)} - s^{(6)} = 11,97$	$\mu^{(6)} = -1$
10,91	$s^{(7)} = 1295,09 + i'$	$s^{(8)} - s^{(7)} = 9,91$	$\mu^{(7)} = -16$
11410,97	$s^{(8)} = 1305,00 + i'$		$\mu^{(8)} = 666285$

et pour le pendule court ($i' = h + 1,44$) :

$m^{(1)} = 0,11$	$s^{(1)} = 3,18$	$s^{(8)} - s^{(1)} = 437,82 + i'$	$\mu^{(1)} = 0$
$m^{(2)} = 40,49$	$s^{(2)} = 9,91$	$s^{(8)} - s^{(2)} = 431,09 + i'$	$\mu^{(2)} = 157$
$m^{(3)} = 3,60$	$s^{(3)} = 219,97 + \frac{1}{2} i'$	$s^{(8)} - s^{(3)} = 221,03 + \frac{1}{2} i'$	$\mu^{(3)} = 53107 + 252$
$m^{(4)} = 3,69$	$s^{(4)} = 413,80$	$s^{(8)} - s^{(4)} = 27,20 + i'$	$\mu^{(4)} = 2$
$m^{(5)} = 19,72$	$s^{(5)} = 428,51 + i'$	$s^{(8)} - s^{(5)} = 12,49$	$\mu^{(5)} = 19$
$m^{(6)} = -1,63$	$s^{(6)} = 429,03 + i'$	$s^{(8)} - s^{(6)} = 11,97$	$\mu^{(6)} = -1$
$m^{(7)} = -10,91$	$s^{(7)} = 431,09 + i'$	$s^{(8)} - s^{(7)} = 9,91$	$\mu^{(7)} = -16$
$m^{(8)} = 11410,97$	$s^{(8)} = 441,00 + i'$		$\mu^{(8)} = 666285$

c. Pendule suspendu à une lame qui s'enroule sur un cylindre. — La petite lame de laiton avait $6^l,84$ de long. De la description de l'appareil employé à ces expériences (Art. 18), il résulte que l'axe du cylindre, dont la surface repose sur les plans horizontaux qui portent également le couteau et la pince, est plus élevé que dans les expériences précédentes d'une quantité égale au rayon de ce cylindre. Il s'ensuit que l'échelle graduée et aussi le cylindre de coïncidence sont plus éloignés de $0^l,5$ du centre du mouvement. Il n'y a du reste aucune différence entre ces deux pendules et ceux de la première série d'expériences, si ce n'est dans la longueur et le poids des fils. On a donc pour le long pendule ($i' = h - 862,06$) :

$m^{(1)} = 0,12$	$s^{(1)} = 3,42$	$s^{(8)} - s^{(1)} = 1301,58 + i'$	$\mu^{(1)} = 0$
$m^{(2)} = 40,49$	$s^{(2)} = 10,40$	$s^{(8)} - s^{(2)} = 1294,60 + i'$	$\mu^{(2)} = 157$
$m^{(3)} = 11,06$	$s^{(3)} = 652,215 + \frac{1}{2} i'$	$s^{(8)} - s^{(3)} = 652,785 + \frac{1}{2} i'$	$\mu^{(3)} = 1520103 + 2367.$
$m^{(4)} = 3,81$	$s^{(4)} = 1278,30$	$s^{(8)} - s^{(4)} = 26,70 + i'$	$\mu^{(4)} = 2$
$m^{(5)} = 19,72$	$s^{(5)} = 1292,51 + i'$	$s^{(8)} - s^{(5)} = 12,49$	$\mu^{(5)} = 19$
$m^{(6)} = -1,63$	$s^{(6)} = 1293,03 + i'$	$s^{(8)} - s^{(6)} = 11,97$	$\mu^{(6)} = -1$
$m^{(7)} = -10,91$	$s^{(7)} = 1295,09 + i'$	$s^{(8)} - s^{(7)} = 9,91$	$\mu^{(7)} = -16$
$m^{(8)} = 11410,97$	$s^{(8)} = 1305,00 + i'$		$\mu^{(8)} = 666285$

et pour le pendule court ($i' = h + 1,94$) :

$m^{(1)} = 0,12$	$s^{(1)} = 3,42$	$s^{(8)} - s^{(1)} = 437,58 + i'$	$\mu^{(1)} = 0$
$m^{(2)} = 40,49$	$s^{(2)} = 10,40$	$s^{(8)} - s^{(2)} = 430,60 + i'$	$\mu^{(2)} = 157$
$m^{(3)} = 3,60$	$s^{(3)} = 220,215 + \frac{1}{2} i'$	$s^{(8)} - s^{(3)} = 220,785 + \frac{1}{2} i'$	$\mu^{(3)} = 52985 + 252,$
$m^{(4)} = 3,69$	$s^{(4)} = 414,30$	$s^{(8)} - s^{(4)} = 26,70 + i'$	$\mu^{(4)} = 2$
$m^{(5)} = 19,72$	$s^{(5)} = 428,51 + i'$	$s^{(8)} - s^{(5)} = 12,49$	$\mu^{(5)} = 19$
$m^{(6)} = -1,63$	$s^{(6)} = 429,03 + i'$	$s^{(8)} - s^{(6)} = 11,97$	$\mu^{(6)} = -1$
$m^{(7)} = -10,91$	$s^{(7)} = 431,09 + i'$	$s^{(8)} - s^{(7)} = 9,91$	$\mu^{(7)} = -16$
$m^{(8)} = 11410,97$	$s^{(8)} = 441,00 + i'$		$\mu^{(8)} = 666285$

De ces données on déduit, pour les six pendules employés,

Couteau	Pendule long :	$c = -0{,}22586 - 0{,}00052\,i'$
	Pendule court :	$c = +0{,}05355 - 0{,}00064\,i''$
Pince	Pendule long :	$c = -0{,}22307 - 0{,}00052\,i'$
	Pendule court :	$c = +0{,}05544 - 0{,}00064\,i''$
Cylindre de déroulement	Pendule long :	$c = -0{,}22471 - 0{,}00052\,i'$
	Pendule court :	$c = +0{,}05389 - 0{,}00064\,i''$

Si enfin on introduit encore la correction relative à la flexibilité du fil, on obtient les valeurs complètes de c qui servent à la réduction des observations :

Couteau	Pendule long :	$c = -0{,}22570 - 0{,}00052\,i'$
	Pendule court :	$c = +0{,}05492 - 0{,}00064\,i''$
Pince	Pendule long :	$c = -0{,}22291 - 0{,}00052\,i'$
	Pendule court :	$c = +0{,}05681 - 0{,}00064\,i''$
Cylindre de déroulement	Pendule long :	$c = -0{,}22455 - 0{,}00052\,i'$
	Pendule court :	$c = +0{,}05526 - 0{,}00064\,i''$

Calcul des pendules de la troisième série d'expériences.

La sphère d'ivoire avec laquelle a été faite cette série d'expériences pèse dans le vide 2481,26 grains, en y comprenant la pince du fil qui y est vissée. Dans l'eau prise au maximum de densité, dont la température est exactement celle à laquelle la pesée a été faite, elle pèse 1098,50 grains, d'où l'on conclut 1,79443 pour le poids spécifique de la boule réunie à la pince, ainsi qu'il a été dit à l'art. 15.

On a rempli ensuite de cire le trou de la sphère d'ivoire dans lequel se visse la pince; la boule pesait alors 2461,80 grains dans le vide, et 1081,38 grains dans l'eau prise au maximum de densité. Le poids d'eau déplacé était donc de $1380^{\mathrm{g}},42$, l'eau étant au maximum de densité, ce qui, d'après le poids donné plus haut pour une ligne cube d'eau à cette même densité, fixe à $12^{\mathrm{l}},047$ le rayon de la sphère. Les expériences de cette série ayant été faites à une température très voisine de celle des pesées de la sphère dans l'eau, je me suis servi de la valeur ainsi trouvée pour le rayon de la sphère, sans lui faire subir de correction.

Le trou creusé dans la sphère d'ivoire est égal à celui de la

sphère de cuivre; on obtient donc les masses $m^{(6)}$ et $m^{(7)}$, en diminuant leurs valeurs relatives à la sphère de laiton dans le rapport des poids spécifiques, 8,19 : 1,783. Mais, comme le rayon de la sphère d'ivoire est plus petit de $0^{l},035$ que celui de la sphère de laiton, l'expression de $s^{(8)}$, qui était précédemment $r + 13,91 + r'$, devra être un peu altérée et réduite à $r + 13,88 + r'$. La longueur de la lamelle de laiton, dans les expériences faites avec le cylindre, était de $6^{l},48$; quand on faisait usage du couteau, cette lamelle était identique à ce qu'elle était dans les premières expériences. Les fils, plus fins qu'auparavant, pesaient 6,28 grains et 2,04 grains. On a donc les données suivantes pour le calcul de réduction au pendule simple.

a. Pendules suspendus au cylindre.

Pendule long..................	$i' = h - 862,58$
Pendule court.................	$i' = h + 1,42$

TABLEAU DES VALEURS DE m, s ET μ (¹).

b. Pendules suspendus à un couteau.

Pendule long..................	$i' = h - 862,58$
Pendule court.................	$i' = h + 1,42$

TABLEAU DES VALEURS DE m, s ET μ (¹).

Il en résulte, pour les quatre pendules employés :

Cylindre.................	Pendule long : $c = -0,80241 - 0,00193\,i'$
	Pendule court : $c = -0,21471 - 0,00176\,i'$
Couteau.................	Pendule long : $c = -0,81372 - 0,00193\,i'$
	Pendule court : $c = -0,22197 - 0,00178\,i'$

L'effet de la flexibilité du fil est de $+0^{l},00016$ pour le pendule long et de $+0^{l},00138$ pour le pendule court. Les valeurs définitives de c sont donc :

Cylindre.................	Pendule long : $c = -0,80225 - 0,00193\,i'$
	Pendule court : $c = -0,21333 - 0,00176\,i'$
Couteau.................	Pendule long : $c = -0,81356 - 0,00193\,i'$
	Pendule court : $c = -0,22059 - 0,00178\,i'$

(¹) J'ai cru inutile de reproduire ces Tableaux, les précédents étant suffisants pour faire comprendre le procédé de calcul de Bessel. (C.-W.)

APPENDICE VIII.

Étude de l'influence des inégalités du fil sur la réduction au pendule simple.

Je suppose le point origine du fil à une distance r du centre du mouvement; j'appelle r' sa longueur, $\varphi(x)$ sa section droite à la distance x de son point milieu et Δ le poids d'une ligne cube de la matière qui le compose. D'après cette notation, le poids total du fil est

$$m = \Delta \int \varphi(x)\, dx;$$

le produit du poids par la distance du centre de gravité du fil au point de suspension

$$ms = \Delta \int \varphi(x)\,(r + \tfrac{1}{2} r' + x)\, dx;$$

et enfin le moment d'inertie du fil, rapporté au centre du mouvement,

$$\mu = \Delta \int \varphi(x)(r + \tfrac{1}{2} r' + x)^2\, dx.$$

Si l'on désigne par m', $m's'$ et μ' les valeurs de m, ms et μ relatives à toutes les autres parties du pendule prises en bloc, on a, pour la longueur du pendule simple équivalent, en faisant abstraction du fil,

$$l = \frac{\mu'}{m's'},$$

et, si l'on tient compte du fil,

$$l + \delta l = \frac{\mu' + \Delta \int \varphi(x)(r + \frac{1}{2} r' + x)^2\, dx}{m's' + \Delta \int \varphi(x)(r + \frac{1}{2} r' + x)\, dx};$$

d'où, pour l'influence du fil,

$$\delta l = \frac{\Delta}{m's'}\left[\int \varphi(x)(r + \tfrac{1}{2} r' + x)^2\, dx - l \int \varphi(x)(r + \tfrac{1}{2} r' + x)\, dx\right],$$

et, si l'on remplace Δ par son expression $\dfrac{m}{\int \varphi(x)\, dx}$,

$$\delta l = \frac{m}{m's'}\left[\frac{\int \varphi(x)(r + \frac{1}{2} r' + x)^2\, dx}{\int \varphi(x)\, dx} - l\,\frac{\int \varphi(x)(r + \frac{1}{2} r' + x)\, dx}{\int \varphi(x)\, dx}\right]$$

ou encore

$$\delta l = \frac{m}{m's'}\Big[(r + \tfrac{1}{2}r' - l)(r + \tfrac{1}{2}r') \\ + (2r + r' - l)\frac{\int\varphi(x)x\,dx}{\int\varphi(x)\,dx} + \frac{\int\varphi(x)xx\,dx}{\int\varphi(x)\,dx}\Big]$$

Les intégrales doivent être prises de $-\frac{1}{2}r'$ à $+\frac{1}{2}r'$.

Si l'on renverse le fil bout pour bout, de telle façon que l'extrémité supérieure devienne l'extrémité inférieure, il faut remplacer dans cette expression $\varphi(x)$ par $\varphi(-x)$, ce qui donne, dans cette nouvelle position du fil,

$$\delta l = \frac{m}{m's'}\Big[(r + \tfrac{1}{2}r' - l)(r + \tfrac{1}{2}r') \\ - (2r + r' - l)\frac{\int\varphi(x)x\,dx}{\int\varphi(x)\,dx} + \frac{\int\varphi(x)xx\,dx}{\int\varphi(x)\,dx}\Big].$$

Il résulte de là que l'influence des inégalités du fil est à peu de chose près la même pour les deux positions du fil, car le terme qui a un signe différent dans les deux expressions n'a qu'une influence très faible, en raison de sa multiplication par le facteur $(2r + r' - l)$. Ce facteur est en effet toujours très petit, lorsque l'origine du fil est voisine du centre du mouvement et son autre bout proche du centre d'oscillation. La demi-somme des deux expressions représente l'influence du fil sur la moyenne de deux expériences entre lesquelles on aura eu soin d'inverser le fil. Cette demi-somme est

$$= \frac{m}{m's'}\left[\left(r + \frac{1}{2}r' - l\right)\left(r + \frac{1}{2}r'\right) + \frac{\int\varphi(x)xx\,dx}{\int\varphi(x)dx}\right].$$

Si maintenant on pose

$$\varphi(x) = h\left(1 + \alpha\frac{x}{r'} + \beta\frac{xx}{r'r'} + \ldots\right),$$

où h est la section du fil en son point milieu, les termes impairs disparaissent dans les deux intégrales, et l'on obtient

$$\int\varphi(x)xx\,dx = hr'^3\left(\frac{1}{3.2^2} + \frac{\beta}{5.2^4} + \frac{\delta}{7.2^6} + \ldots\right),$$

$$\int\varphi(x)\,dx = hr'\left(1 + \frac{\beta}{3.2^2} + \frac{\delta}{5.2^4} + \ldots\right).$$

Si alors on néglige les puissances et les produits de β, δ, . . . ,

l'influence cherchée du fil sera

$$-\frac{m}{m\,s}\left[\frac{1}{3}r'r'-\frac{1}{2}r'(l-2r)-r(l-r)+r'r'\left(\frac{\beta}{180}+\frac{\delta}{840}+\frac{\zeta}{4032}+\ldots\right)\right].$$

La réduction de la longueur du pendule simple au pendule composé sera donc

$$-\frac{m}{m\,s'}\left[\frac{1}{3}r'r'-\frac{1}{2}r'(l-2r)-r(l-r)\right]\left[1+\frac{r'r'\left(\frac{\beta}{180}+\frac{\delta}{840}+\frac{\zeta}{4032}+\ldots\right)}{\frac{1}{3}r'r'-\frac{1}{2}r'(l-2r)-r(l-r)}\right];$$

telle est la nouvelle réduction à appliquer aux expériences où l'on n'a pas tenu compte des irrégularités du fil.

On a, pour les deux pendules de l'appareil, dans la première série d'expériences :

	Pendule long.	Pendule court.
Réduction relative au fil.......	$+0^{1},2126$	$+0^{1},0244$
Longueur du fil...............	$r'=$ 1280,33	416,34
Longueur du pendule simple équivalent.................	$l=$ 1305,27	441,56
Distance du point origine du fil au point de suspension du pendule....................	$r=$ 14,52	14,52

Il en résulte, pour la réduction complète relative au fil qu'il faut appliquer aux deux pendules :

Pendule long.. $+0^{1},2126+0^{1},00669.\beta+0^{1},001434.\delta+0^{1},000299.\zeta+\ldots$

Pendule court. $+0,0244-0,00068.\beta-0,000147.\delta-0,000031.\zeta-\ldots$

Afin d'obtenir une évaluation de la grandeur possible des coefficients β, δ, ζ, ..., j'ai mesuré, en des points très nombreux, le diamètre du fil du long pendule à l'aide d'un des microscopes de Pistor destinés à la vérification des divisions du cercle méridien, et je l'ai trouvé en moyenne de $0^{1},0861$. Le plus grand écart à cette moyenne était de $0^{1},0013$, et je n'ai aucune raison de croire que les mesures elles-mêmes, qui exigent un double pointé du microscope sur les deux bords du fil, puissent donner une approximation plus grande. Admettons pourtant que cet écart soit réellement dû à une inégalité du fil, et prenons alors le double de ce

nombre, $\frac{1}{33}$, pour l'inégalité de la section. Appliquons-la aux deux extrémités du fil, points où son influence est la plus grande possible. Nous aurons

$$\frac{1}{33} = \frac{\beta}{4} + \frac{\delta}{16} + \frac{\zeta}{64} + \ldots$$

Suivant que l'inégalité sera attribuée au terme en β, ou à celui en δ, . . ., la correction prendra les valeurs ci-après :

Pendule long......	$0^l,00081$	$+0^l,00070$	$+0^l,00058$
Pendule court.....	$0,00008$	$+0,00007$	$+0,00006$

Ainsi, dans le cas le plus défavorable, l'admission d'une valeur tout à fait invraisemblable de l'inégalité du fil n'aurait sur la longueur du pendule simple à secondes qu'une influence de $0^l,0004$. En fait, elle est certainement beaucoup plus petite. On peut donc la regarder comme insensible; on voit aussi que le résultat de semblables expériences ne gagnerait rien en précision, si l'on s'assujettissait à opérer successivement sur un grand nombre de fils différents.

APPENDICE IX.

Influence de la forme cylindrique de l'arête du couteau, autour de laquelle oscille le pendule, sur la durée de l'oscillation.

1. Je suppose que l'arête du couteau se termine par une surface cylindrique dont $V = 0$ soit l'équation en coordonnées rectangulaires ξ et η. L'origine de ces coordonnées est le point de contact de l'arête et du plan sur lequel elle s'appuie, dans l'état de repos du pendule. Dans cette situation, l'axe des ξ est vertical, l'axe des η horizontal; les ξ sont comptés positivement au-dessous de l'origine, et les η sont positifs à droite de la verticale.

Quand le pendule fait un angle u avec la verticale, le plan d'appui touche l'arête cylindrique en un point, dont j'appellerai les coordonnées ξ' et η'. Soient x et y les coordonnées d'un élément de masse dm du pendule, par rapport à un second système d'axes immobiles dans l'espace, avec lequel le premier coïncide, quand le pendule est au repos; x sera pris positif au-dessous du

plan d'appui, y et u seront positifs à gauche de la verticale. Les coordonnées de l'origine du premier sytème, rapportées à ces nouveaux axes, seront désignées par les lettres x' et y'. On a donc

$$x = x' + \xi \cos u - \eta \sin u,$$
$$y = y' + \xi \sin u - \eta \cos u.$$

L'équation différentielle du mouvement du pendule est

$$c = \int \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} dm - 2\pi^2 \lambda \int x \, dm,$$

où λ représente la longueur du pendule simple battant la seconde. Mais, comme l'axe de ξ passe par le centre de gravité,

$$\int \xi \, dm = ms,$$

$$\int \eta \, dm = 0,$$

$$\int (\xi\xi + \eta\eta) dm = m(\mu + ss),$$

où m représente la masse du pendule, s l'ordonnée ξ du centre de gravité, et $m\mu$ le moment d'inertie, rapporté à un axe mené parallèlement à l'axe de rotation par le centre de gravité. L'équation différentielle se transforme alors en celle-ci

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} c = (\mu + ss)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2s\frac{du}{dt}\left(\frac{dy'}{dt}\cos u - \frac{dx'}{dt}\sin u\right) \\ + \frac{dx'^2 + dy'^2}{dt^2} - 2\pi^2\lambda(s\cos u - x'). \end{aligned} \right.$$

2. Les coordonnées x' et y' dépendent des coordonnées ξ' et η' du point de contact du cylindre avec le plan. Soit σ l'arc de la surface du cylindre compris entre le point de contact et l'origine des coordonnées ; on a

$$x' = -\xi' \cos u + \eta' \sin u,$$
$$y' = -\xi' \sin u + \eta' \cos u - \sigma.$$

Puisque la normale au point de contact coupe l'axe des ξ sous l'angle u, on a

$$d\xi' = -d\sigma \sin u, \qquad d\eta' = d\sigma \cos u,$$

et, si l'on substitue ces valeurs dans la différentielle de l'équation

$V = 0$,

(2) $$0 = \frac{dV}{d\xi'}\sin u - \frac{dV}{d\eta'}\cos u;$$

cette équation, jointe à l'équation $V = 0$, détermine ξ' et η' en fonction de u.

Si, dans (1), on exprime x' et y' en fonction de ξ' et η', et si l'on néglige le terme en dx'^2 et dy'^2 (car il est de l'ordre du carré de la petite quantité dont l'arête est émoussée, et je négligerai toujours dans la suite les termes de cet ordre), l'équation (1) devient

$$c = (\mu + ss - 2s\xi')\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - 2\pi^2\lambda[(s - \xi')\cos u - \eta'\sin u].$$

Cette équation différentielle est comprise dans la forme générale dont j'ai donné l'intégrale dans l'Appendice I. Dans le cas actuel, on a

$$nn = \frac{\pi^2\lambda s}{\mu + ss},$$

$$f(u) = -\frac{\xi'}{s}\cos u - \frac{\eta'}{s}\sin u,$$

$$f'(u) = -\frac{s}{\mu + ss}\xi'.$$

Comme ξ' et η' s'annulent pour $u = 0$, on a $f(0) = 0$. De plus,

$$\frac{d\,\frac{f(u)}{\sin u}}{du} = \frac{\xi'}{s\sin^2 u} - \frac{d\xi'\cos u + d\eta'\sin u}{s\sin u\,du} = \frac{\xi'}{s\sin^2 u}.$$

L'expression de la durée d'oscillation (Appendice I, art. 3) se change alors en

$$\frac{\pi}{n}\left[F(u'') - \frac{f(u') + f(-u')}{2\sin u'}\,\frac{dF(u')}{du'}\right] + \frac{1}{ns}\int\frac{\xi'\left(1 - \frac{s}{l}\sin^2 u\right)du}{\sin^2 u\sqrt{2\cos u - 2\cos u'}},$$

où $l.s$ est mis à la place de $\mu + ss$, l désignant donc la longueur du pendule simple qui effectuerait une oscillation dans le même temps que le pendule d'expériences, si celui-ci oscillait autour de l'origine des coordonnées. Mais, si l'on appelle l' la longueur du pendule simple correspondant à la durée d'oscillation autour de l'arête cylindrique, la véritable durée d'oscillation est $\sqrt{\frac{l'}{\lambda}}\,F(u'')$,

et, si l'on égale cette valeur à la valeur précédente, on a

$$(3)\quad l' = l - l\frac{f(u') - f(-u')}{\sin u'}\frac{d\mathrm{F}(u')}{\mathrm{F}(u')\,du'} - \frac{2l}{s\,\mathrm{F}(u')}\frac{1}{\pi}\int \frac{\xi\left(1 - \frac{s}{l}\sin^2 u\right)du}{\sin^2 u\sqrt{2\cos u - 2\cos u'}}.$$

3. Je vais supposer maintenant que l'arête est terminée par un cylindre qui a pour section une courbe du second degré, ayant un de ses axes en coïncidence avec celui des ξ, et dont la surface est tangente aux faces latérales du prisme. Soit $2i$ l'angle de ces faces, et soit b la corde de la section du cylindre entre les points où il se raccorde avec les plans, ou la largeur de la partie émoussée. Si a et p représentent, l'un le demi-axe de la courbe dirigé suivant l'axe des ξ, et l'autre le demi-paramètre de cette courbe, on a

$$0 = \mathrm{V} = 2p\xi' \mp \frac{p}{a}\xi'\xi' - \eta'\eta'.$$

Le signe + correspond au cas de l'ellipse, le signe — à celui de l'hyperbole. Si l'on différentie, on a en plus, d'après l'équation (2),

$$0 = p\left(1 \mp \frac{\xi'}{a}\right)\sin u - \eta'\cos u.$$

On tire ensuite du système de ces deux équations, en posant $\varepsilon = 1 \mp \frac{p}{a}$,

$$\xi' = \mp a\left(1 - \frac{\cos u}{\sqrt{1 - \varepsilon\sin^2 u}}\right),$$

$$\eta' = \pm a\frac{(1 - \varepsilon)\sin u}{\sqrt{1 - \varepsilon\sin^2 u}}.$$

Si l'on remplace u par $90^\circ - i$, η' devient égal à $\frac{1}{2}b$, d'où l'on conclut

$$a = \pm\frac{b}{2}\frac{\sqrt{1 - \varepsilon\cos^2 i}}{(1 - \varepsilon)\cos i}$$

et, par suite,

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned} \xi' &= \frac{b\sqrt{1 - \varepsilon\cos^2 i}}{2(1 - \varepsilon\cos i}\left(\frac{\cos u}{\sqrt{1 - \varepsilon\sin^2 u}} - 1\right),\\ f(u) &= \frac{b\sqrt{1 - \varepsilon\cos^2 i}}{2s(1 - \varepsilon)\cos i}\left(\cos u - \sqrt{1 - \varepsilon\sin^2 u}\right).\end{aligned}\right.$$

Quand la courbe terminale est une ellipse, dont le petit axe

est dirigé suivant l'axe des ξ, ε est compris entre $-\infty$ et o; pour $\varepsilon = 0$, la courbe est un cercle; pour ε compris entre o et 1, une ellipse dont le grand axe est dirigé suivant l'axe des ξ; pour $\varepsilon = 1$, une parabole; entre 1 et $\text{séc}^2 i$, une hyperbole. La limite de l'ellipse est une ligne droite perpendiculaire à l'axe des ξ, et la limite de l'hyperbole est le couple de droites formé par l'angle plan du prisme, avec le sommet duquel coïncide son sommet propre; dans ce cas, b reste nécessairement arbitraire.

4. A la place de l'expression (3) de la durée d'oscillation, complète quant aux quantités du premier ordre, j'écrirai

$$l' = l - \frac{l}{s} b.q,$$

en représentant par q la somme des deux quantités q' et q'' que voici,

$$q' = \frac{\sqrt{1-\varepsilon\cos^2 i}}{(1-\varepsilon)\cos i}\left(\frac{\cos u' - \sqrt{1-\varepsilon\sin^2 u'}}{\sin u'}\right)\frac{d\,\mathrm{F}(u')}{\mathrm{F}(u')\,du'},$$

$$q'' = \frac{\sqrt{1-\varepsilon\cos^2 i}}{(1-\varepsilon\cos i\,\mathrm{F}(u')}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-u'}^{+u'}\frac{\left(\sqrt{1-\varepsilon\sin^2 u} - \cos u\right)\left(1-\frac{s}{l}\sin^2 u\right)}{\sin^2 u\sqrt{1-\varepsilon\sin^2 u}\sqrt{2\cos u - 2\cos u'}}\,du.$$

Si l'on introduit un angle x, défini par la relation

$$\sin u = -\sin u'\cos x,$$

q'' se transforme et devient

$$\begin{aligned} q'' = {} & \frac{\sqrt{1-\varepsilon\cos^2 i}}{(1-\varepsilon)\cos i\,\mathrm{F}(u')}\,\frac{1}{\sin^2 u'.\pi} \\ & \times\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 u'\cos^2 x}} - \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon\sin^2 u'\cos^2 x}}\right) \\ & \times\left(1-\frac{s}{l}\sin^2 u'\cos^2 x\right)\sqrt{\frac{\sqrt{1-\sin^2 u'\cos^2 x}+\cos u'}{2}}\,\frac{dx}{\cos^2 x}, \end{aligned}$$

où l'intégrale est prise de $x = 0$ à $x = \pi$.

En développant q' et q'' suivant les puissances de $\sin u'$, ce qui est permis tant que $\varepsilon\sin^2 u'$ est une petite quantité, on

obtient

$$q' = \frac{\sqrt{1-\varepsilon\cos^2 i}}{\cos i}\left[-\frac{1}{8}\sin^2 u' - \left(\frac{15}{256}+\frac{1}{32}\varepsilon\right)\sin^4 u' - \ldots\right],$$

$$\begin{aligned} q'' = \frac{\sqrt{1-\varepsilon\cos^2 i}}{\cos i}\Bigg[\frac{1}{2} &+ \left(\frac{1}{16}+\frac{3}{16}\varepsilon-\frac{1}{4}\frac{s}{l}\right)\sin^2 u' \\ &+ \left(\frac{39}{2048}+\frac{33}{512}\varepsilon+\frac{15}{128}\varepsilon^2-\frac{13}{128}\frac{s}{l}-\frac{9}{64}\frac{s}{l}\varepsilon\right)\sin^4 u' + \ldots\Bigg] \end{aligned}$$

et, faisant la somme,

$$\left\{\begin{aligned} q = \frac{\sqrt{1-\varepsilon\cos^2 i}}{2\cos i}\Bigg[1 &- \left(\frac{1}{8}-\frac{3}{8}\varepsilon+\frac{1}{2}\frac{s}{l}\right)\sin^2 u' \\ &- \left(\frac{81}{1024}-\frac{17}{256}\varepsilon-\frac{15}{64}\varepsilon^2+\frac{13}{64}\frac{s}{l}+\frac{9}{32}\frac{s}{l}\varepsilon\right)\sin^4 u' + \ldots\Bigg]. \end{aligned}\right.$$

Mais cette expression cesse d'être applicable, quand ε est très grand. Si donc on s'abstient de développer l'expression

$$\sqrt{1-\varepsilon\sin^2 u'\cos^2 x}$$

et qu'on la désigne, avec M. Legendre, par Δ, on obtient, en négligeant les termes qui ne contiennent pas ε et qui sont multipliés par le facteur $\sin^2 u'$,

$$q' = 0,$$

$$\begin{aligned} q'' = \frac{\sqrt{1-\varepsilon\cos^2 i}}{(1-\varepsilon)\cos i.\pi}\int\Bigg[&\left(-\frac{1}{\sin^2 u'}+\frac{1}{8}\right)\left(\frac{dx}{\Delta\cos^2 x}-\frac{dx}{\cos^2 x}\right) \\ &+\left(\frac{s}{l}+\frac{1}{8}\right)\frac{dx}{\Delta}-\left(\frac{s}{l}-\frac{3}{8}\right)dx\Bigg], \end{aligned}$$

et, si l'on intègre de o à π,

$$q = \frac{\sqrt{1-\varepsilon\cos^2 i}}{(1-\varepsilon)\cos i}\left[\left(-\frac{1}{\sin^2 u'}+\frac{1}{8}\right)\frac{1}{\pi}\int\frac{dx}{\Delta\cos^2 x}+\left(\frac{s}{l}+\frac{1}{8}\right)\int\frac{dx}{\Delta}-\frac{s}{l}+\frac{3}{8}\right].$$

On sait qu'on peut débarrasser cette intégrale du dénominateur $\cos^2 x$; en effet, si l'on différentie $\Delta\tang x$, on a

$$d.(\Delta\tang x) = \frac{dx}{\Delta\cos^2 x} - \varepsilon\sin^2 u'\,\frac{\cos^2 x\,dx}{\Delta}.$$

Or $\Delta\tang x$ s'annule pour $x = 0$ et $x = \pi$; donc

$$\int\frac{dx}{\Delta\cos^2 x} = \varepsilon\sin^2 u'\int\frac{\cos^2 x\,dx}{\Delta}.$$

L'expression de q devient donc

$$(6)\qquad \frac{\sqrt{1-\varepsilon\cos^2 i}}{(1-\varepsilon)\cos i}\left[\int\frac{\left(\frac{1}{8}-\varepsilon\cos^2 x\right)dx}{\pi\Delta}+\frac{3}{8}+\frac{s}{l}\int\frac{dx}{\pi\Delta}-\frac{s}{l}\right].$$

5. La forme que Gauss a donnée au calcul des transcendantes elliptiques qui interviennent ici est, comme on sait,

$$\int\frac{dx}{\pi\sqrt{mm\cos^2 x+nn\sin^2 x}}=\frac{1}{\mu}$$

$$\int\frac{dx\,(\cos^2 x-\sin^2 x)}{\pi\sqrt{mm\cos^2 x+nn\sin^2 x}}=-\frac{\nu}{\mu},$$

où μ est la limite vers laquelle tendent les quantités

$$m'=\tfrac{1}{2}(m+n),\quad n'=\sqrt{mn},\quad m''=\tfrac{1}{2}(m'+n'),\quad n''=\sqrt{m'n'},\quad \ldots,$$

et où l'on a

$$\nu=\frac{2\lambda'\lambda'+4\lambda''\lambda''+8\lambda'''\lambda'''+\ldots}{\lambda\lambda}$$

avec

$$16\lambda\lambda=mm-nn,\qquad m'\lambda'=\lambda\lambda,\qquad m''\lambda''=\lambda'\lambda',\qquad \ldots.$$

Si l'on applique ici ces notations, on a

$$m=\sqrt{1-\varepsilon\sin^2 u'},\qquad n=1,$$

ce qui donne

$$(7)\qquad q=\frac{\sqrt{1-\varepsilon\cos^2 i}}{2\cos i}\left[\frac{1-\nu}{\mu}+\frac{\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{\mu}\right)+\frac{\nu}{\mu}}{1-\varepsilon}-\frac{2s}{l}\,\frac{1-\frac{1}{\mu}}{1-\varepsilon}\right].$$

Dans le cas où $\varepsilon=-\infty$, c'est-à-dire où l'arête du couteau est tronquée par un plan perpendiculaire à l'axe des ξ, cette formule n'est plus immédiatement applicable; mais, si l'on pose

$$\sqrt{1-\varepsilon\sin^2 u'}=\Delta',\qquad \varepsilon\sin^2 u'=\Delta'\Delta'\varepsilon',$$

l'expression (6) se transforme aisément en la suivante :

$$q=\frac{\sqrt{1-\varepsilon\cos^2 i}}{(1-\varepsilon)\cos i}\left[\frac{\left(-\frac{1}{\sin^2 u'}+\frac{1}{8}+\frac{s}{l}\right)}{\Delta'}\int\frac{dx}{\pi\sqrt{1+\varepsilon'\sin^2 x}}\right.$$
$$\left.+\frac{\Delta'}{\sin^2 u'}\int\frac{dx\sqrt{1+\varepsilon'\sin^2 x}}{\pi}+\frac{3}{8}-\frac{s}{l}\right].$$

Sous cette forme, on voit immédiatement, par le développement en série de ces deux intégrales, tel que l'a donné M. Legendre (*Exercices de Calcul intégral*, t. I, p. 68), que, pour $\varepsilon = -\infty$, il ne reste que le second terme, qui devient

$$\frac{\sqrt{1-\varepsilon\sin^2 u'}}{\sin^2 u} = \frac{2}{\pi}.$$

On a donc, dans ce cas,

$$(8)\qquad q = \frac{2}{\pi \sin u'}.$$

Tel est le maximum d'effet que peut produire la troncature de l'arête.

APPENDICE X.

Influence du support sur le mouvement d'un corps solide oscillant autour d'un couteau.

1. Quand un pendule dont le couteau repose sur des supports horizontaux est immobile, il existe, dans le plan vertical passant par l'arête du couteau, un point que je supposerai rester dans ce plan même durant le mouvement du pendule. Soit h sa distance à l'arête. Mais le couteau se déplace sur ses supports, et, lorsque le pendule fait un angle u avec la verticale, sa distance à sa position primitive est $h \sin u$. En même temps, il subit l'action contraire d'une force que j'appellerai mQ, m étant la masse du pendule.

En conservant les notations de l'art. 1 de l'Appendice IX, on a l'équation différentielle du mouvement

$$c = \int dm \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} - 2\pi^2\lambda \int x\, dm - 2\pi^2\lambda m h \int Q \cos u\, du.$$

Si l'on exprime x et y au moyen des coordonnées ξ et η fixes par rapport au pendule, on a

$$x = \xi \cos u + \eta \sin u,$$
$$y = \xi \sin u - \eta \cos u + h \sin u,$$

et, en effectuant les intégrations par rapport à la masse, on ob-

tient

$$(1)\quad \begin{cases} c = \left(\dfrac{du}{dt}\right)^2 [\mu + (s + h)^2 - (2sh + hh)\sin^2 u] \\ \qquad - 2\pi^2\lambda\left(s\cos u + h\displaystyle\int Q\cos u\,du\right). \end{cases}$$

2. La durée d'une oscillation complète se déduit de là d'après la troisième formule de l'Appendice I, après que l'on a remplacé Q par sa valeur. J'adopterai pour cette valeur l'expression

$$a^{(0)} + a^{(1)} h \sin u + a^{(2)} h^2 \sin^2 u + a^{(3)} h^3 \sin^3 u + \ldots;$$

d'où résulte, pour la quantité que j'ai appelée $f(u)$ dans cet Appendice, la valeur

$$f(u) = -\frac{h}{s}\left(a^{(0)}\sin u + \tfrac{1}{2}a^{(1)} h \sin^2 u + \tfrac{1}{3}a^{(2)} h^2 \sin^3 u + \ldots\right).$$

On a de plus, en négligeant h^2 dans les termes où il n'est pas multiplié par un des coefficients a,

$$f'(u) = \frac{sh}{\mu + ss}\cos^2 u;$$

et enfin

$$nn = \frac{\pi^2\lambda s}{\mu + ss}.$$

On en conclut que $f(0) = 0$, et la formule citée devient

$$\frac{\pi}{n}\left[F(u'') - \frac{dF(u'')}{du}\,\frac{f(u') + f(-u')}{2\sin u'}\right] + \frac{1}{n}\int \frac{f'(u)\,du + d\,\dfrac{f(u)}{\sin u}}{\sqrt{2\cos u - 2\cos u'}}.$$

Appelons l' la longueur du pendule simple équivalent; on trouve, pour la durée de l'oscillation,

$$\sqrt{\frac{l'}{\lambda}}\,F(u'').$$

Si alors on égale ces deux expressions de la durée et si l'on remplace $\mu + ss$ par sl, l désignant la longueur du pendule simple correspondant au pendule qui oscillerait sans éprouver de perturbations de la part des supports, on a

$$l' = l - \frac{l\,dF(u'')}{F(u'')\,du''}\,\frac{f(u') + f(-u')}{\sin u'} + \frac{2l}{F(u'')}\int \frac{f'(u)\,du + d\,\dfrac{f(u)}{\sin u}}{\pi\sqrt{2\cos u - 2\cos u'}}.$$

Si l'on néglige dans cette formule les termes de la perturbation qui sont multipliés par le carré ou les puissances supérieures de l'amplitude, le deuxième terme du second membre disparaît, et le troisième devient, après substitution des valeurs de $f(u)$ et de $f'(u)$:

$$2h\int_0^{u'}\frac{\cos^2 u\,du}{\pi\sqrt{2\cos u-2\cos u'}}$$
$$-\frac{2lh}{s}\int_0^{u'}\frac{\left(\frac{1}{2}a^{(1)}h+\frac{2}{3}a^{(2)}h^2\sin u+\frac{3}{4}a^{(3)}h^3\sin^2 u+\ldots\right)\cos u\,du}{\pi\sqrt{2\cos u-2\cos u'}}.$$

L'intégrale de cette expression, exacte dans les limites d'approximation indiquées, est

$$2h-2h\frac{l}{s}\left(\frac{1}{2}a^{(1)}h+\frac{1.3}{2.4}a^{(3)}h^3\sin^2 u'+\frac{1.3.5}{2.4.6}a^{(5)}h^5\sin^4 u'+\ldots\right).$$

On a donc

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} l'-l=2h-2h\frac{l}{s}\Big(\frac{1}{2}a^{(1)}h&+\frac{1.3}{2.4}a^{(3)}h^3\sin^2 u'\\ &+\frac{1.3.5}{2.4.6}a^{(5)}h^5\sin^4 u'+\ldots\Big).\end{aligned}\right.$$

3. La quantité dont l'amplitude décroît en une oscillation est, d'après la seconde formule de l'Appendice I :

$$-\frac{f(-u')-f(u')}{\sin u'}.$$

Si donc on remplace $f(-u')$ et $f(u')$ par leurs valeurs, cette expression deviendra

$$(3)\qquad -\frac{2h}{s}\left(a^{(0)}-\frac{1}{3}a^{(2)}h^2\sin^2 u'-\frac{1}{5}a^{(4)}h^4\sin^4 u'-\ldots\right).$$

TABLEAUX D'EXPÉRIENCES.

PREMIÈRE SÉRIE.

EXPÉRIENCES FAITES AVEC LA BOULE DE LAITON ET LE CYLINDRE DE DÉROULEMENT.

PREMIÈRE DÉTERMINATION.

Distance du centre de gravité de la pince supérieure au point de suspension = 14,55 lignes.

Comparaison des deux horloges.

		R.	P.			R.	P.
		h m s	h m s			h m s	h m s
1.	Mars 31	9.49. 0	9.48.28	14.	Avril 10	1. 8. 0	1. 3.28
2.		20.28.30	20.27.47	15.		6.53. 0	6.48.22
3.		21.27. 0	21.26.16	16.		8.49.30	8.44.50
4.		22.26. 0	22.25.15	17.		21.33. 0	21.28. 7
5.	Avril 1	4.10. 0	4. 9. 9	18.		22.31.30	22.26.36
6.	8	21.10.30	21. 6.27	19.		1.29. 0	1.24. 3
7.		23. 7. 0	23. 2.55	20.	11	6.20. 0	6.14.58
8.		0. 4. 0	23.59.54	21.	12	21.25. 0	21.19.18
9.		1. 2. 0	0.57.53	22.		22.23.30	22.17.47
10.	9	4.50.45	4.46.34	23.		0.19.30	0.13.45
11.		6.45.45	6.41.32	24.		1.17.30	1.11.44
12.		7.42.30	7.38.16	25.	13	3.12.30	3. 6.42
13.		8.40. 0	8.35.45	26.		4. 9.30	4. 3.41

Temps au bout duquel P *a perdu un battement sur* R.

		h m	m s			h m	m s
1 à 4.	Mars 31	15.46	58.13,1	14 à 16.	Avril 10	4.44	57.38,6
2 à 5.		0.36	57.36,6	17 à 19.		23.37	59. 2,3
6 à 9.	Avril 8	23. 3	57.50,5	19 à 20.	11	3.55	58.12,0
8 à 10.	9	2.36	57.18,2	21 à 24.	12	23.21	58. 6,0
10 à 13.		6.41	57.17,1	23 à 26.	13	2.15	57.30,0

Corrections de la pendule R.

	Temps sidéral.	Correction.
	h m	s
Mars 30...	5.22	+ 2,013
31...	0.23	+3,094
Avril 8...	7.29	+6,503
9...	6.24	+6,962
10...	9.59	+7,770

		Marche diurne.
	h m	s
Mars 31.....	2.53	+0,603
Avril 4	15.56	+0,467
8.. ..	18.57	+0,482
9.....	20.12	+0,703
10 (1)..	13.16	+0,748
11 (1)..	13.19	+0,768

On conclut de là, pour les époques des expériences :

Expérience.		Temps sidéral.	*k*.	*s*.	Valeur d'un battement de P.
		h m	m s	s	s
I.*a*....	Mars 31	21.46	57.48,4	+0,579	0,9975639
I.*b*....	Avril 8	22.48	57.52,8	+0,516	0,9975628
I.*c*....	9	6.22	57.17,2	+0,582	0,9975665
I.*d*....	10	4.23	57.38,2	+0,725	0,9975664
I.*e*....	10	23.52	58.59,4	+0,757	0,9975601
I.*f*....	12	23.59	57.58,2	+0,777	0,9975653

EXPÉRIENCE I.*a*.

1826, mars 31, 21^h46^m. T. S. — Baromètre $336^l,81 + 3°,1$ C.

Coïncidences observées.

	h m s		h m s		h m s
0	20.44.44	509	20.59.22	1007	21.13.41
40	45.53	549	21. 0.31	1018	14. 0
80	47. 2	578	1.21	1087	15.59
160	49.20	589	1.40	1098	16.18
189	50.10	618	2.30	1116	16.49
229	51.19	658	3.39	1127	17. 8
		669	3.53	1167	18.17
		738	5.57	1178	18.36
$116\frac{1}{3}$	20.48. $4\frac{2}{3}$	613,5	21. 2.22$\frac{1}{4}$	$1099\frac{3}{4}$	21.16.21

(1) Les marches sont déduites des observations du Soleil.

	h m s		h m s		h m s
1516	21.28.19	2025	21.42.57	2534	21.57.35
1527	28.38	2054	43.47	2545	57.54
1596	30.37	2065	44. 6	2563	58.25
1607	30.56	2105	45.15	2574	58.44
1636	31.46	2134	46. 5	2614	59.53
1676	32.55	2145	46.24	2625	22. 0.12
1687	33.14	2214	48.23	2643	0.43
1716	34. 4	2225	48.42	2654	1. 2
				2683	1.52
				2723	3. 1
$1620\frac{1}{8}$	$21.31.18\frac{5}{8}$	$2120\frac{7}{8}$	$21.45.42\frac{3}{8}$	2615,8	21.59.56,1

	h m s		h m s		h m s
3003	22.11. 4	3530	22.26.13	4010	22.40. 1
3032	11.54	3541	26.32	4021	40.20
3043	12.13	3581	27.41	4050	41.10
3072	13. 3	3592	28. 0	4090	42.19
3083	13.22	3610	28.31	4101	42.38
3152	15.21	3621	28.50	4130	43.28
3163	15.40	3661	29.52	4148	43.59
3192	16.30	3672	30.18	4159	44.18
3232	17.39	3690	30.49	4170	44.37
3243	17.58	3701	31. 8	4181	44.56
3121,5	22.14.28,4	3619,9	22.28.48,1	4106,0	22.42.46,6

	Moyennes réduites des observations.	Amplitude. μ.	Température. t'.	t''.	Calcul. 1s,7249858.	Erreur.
	h m s		o	o	h m s	s
120	20.48.10,9915	38,3	3,48	3,40	20.48.10,9874	—0,0041
620	21. 2.33,4621	33,8			21. 2.33,4621	0,0000
1120	16.55,9300	29,8	3,50	3,42	16.55,9345	-0,0045
1620	31.18,4094	26,4			31.18,4051	—0,0043
2120	45.40,8657	23,6	3,51	3,45	45.40,8744	-0,0087
2620	22. 0. 3,3449	20,9			22. 0. 3,3427	—0,0022
3120	14.25,8126	18,8	3,51	3,48	14.25,8102	0,0024
3620	28.48,2725	16,9			28.48,2771	-0,0046
4120	43.10,7481	15,4	3,53	3,53	43.10,7437	-0,0044

Mesure de la longueur du pendule.

	Vis du levier de contact.	c'.	c''.	c'''.	t'.	t''.
	t	o	o	o	o	o
Avant les expér.. .	13,883	3,44	3,29	3,50	3,48	3,40
Après les expér....	13,887	3,53	3,39	3,59	3,54	3,54
Moyenne	13,885	3,485	3,34	3,545	3,51	3,47

Longueur mesurée.................	F $-$ 1,2524
Corr. de température de F pour 3°,39....	+0,0184
Toise à la température de 3°,46........	863,8732
Élasticité du fil.....................	+0,0042
Longueur du pendule............	F +862,6434

Durée observée de l'oscil. en temps de la pendule....	1^s,72492858
» « en temps moyen.........	1^s,7207265

Longueur corresp. du pendule simple.	1305,1942 + 2,9609ε
Réduction au vide..................	$-$0,2040$-$0,0005ε$-$0,2040k
Réduction au pendule composé.......	+0,2377
Réduction à F.....................	$-$862,6434
Résultat de l'expérience......	F = 442,5845 + 2,9604ε $-$ 0,2040k

---

Expérience I.*b*.

1826, avril 8, 22^h.48^m T.S. — Baromètre 336^l,80 +5°,3 C.

Coïncidences observées.

	h m s		h m s		h m s
0	21.43.42	469	21.57.11	989	22.12. 8
40	44.51	480	57.30	1029	13.17
51	45.10	520	58.39	1069	14.26
80	46. 0	549	59.29	1109	15.35
120	47. 9	560	59.48	1138	16.25
160	48.18	589	22. 0.38	1178	17.34
		629	1.47		
		669	2.56		
$75\frac{1}{6}$	21.45.$51\frac{2}{3}$	$558\frac{1}{8}$	21.59.$44\frac{3}{4}$	$1085\frac{1}{3}$	22.14.$54\frac{1}{6}$

	h m s		h m s		h m s
1458	22.25.37	1967	22.40.15	2476	22.54.53
1498	26.46	1978	40.34	2516	56. 2
1538	27.55	2007	41.24	2527	56.21
1549	28.14	2047	42.33	2556	57.11
1578	29. 4	2087	43.42	2596	58.20
1618	30.13	2127	44.51	2636	59.29
1658	31.22	2167	46. 0	2676	23. 0.38
1698	32.31	2207	47. 9	2716	1.47
$1574\frac{3}{8}$	22.28.$57\frac{3}{4}$	$2073\frac{3}{8}$	22.43.18,5	$2587\frac{3}{8}$	22.58. $5\frac{1}{8}$

	h m s		h m s		h m s
2956	23. 8.41	3494	23.24. 9	3963	23.37.38
2985	9.31	3505	24.28	4003	38.47
2996	9.50	3534	25.18	4014	39. 6
3145	10. 7	3545	25.37	4043	39.56
3156	14.26	3574	26.27	4054	40.15
3185	15.16	3585	26.46	4083	41. 5
3225	16.25	3614	27.36	4094	41.24
3265	17.34	3625	27.55	4123	42.14
		3654	28.45	4163	43.23
		3665	29. 4	4174	43.42
$3114\frac{1}{8}$	$23.13.13\frac{3}{4}$	$3579\frac{1}{2}$	$23.26.36\frac{1}{2}$	4071,4	23.40.45,0

	Moyennes réduites des observations.	Amplitude. μ.	Température. t.	t'.	Calcul. 1ˢ,72494814.	Erreur.
	h m s		°	°	h m s	s
80	21.46. 0,0040	39,0	4,73	5,00	21.46. 0,0023	−0,0017
580	22. 0.22,4835	34,2			22. 0.22,4867	+0,0032
1080	14.44,9669	30,1	4,78	5,00	14.44,9687	+0,0018
1580	29. 7,4529	26,8			29. 7,4489	−0,0040
2080	43.29,9279	23,8	4,85	5,01	43.29,9279	0,0000
2580	57.52,4034	21,3			57.52,4060	+0,0026
3080	23.12.14,8857	19,2	5,00	5,05	23.12.14,8835	−0,0022
3580	26.37,3625	17,2			26.37,3606	−0,0019
4080	40.59,8347	15,5	5,04	5,13	40.59,8373	+0,0026

Mesure de la longueur du pendule.

	Vis du levier de contact.	e'.	e''.	e'''.	t'.	t'''.
	t	°	°	°	°	°
Avant l'expérience..	13,842	4,87	4,78	5,06	4,70	5,00
Après l'expérience..	13,834	4,93	4,83	5,06	5,04	5,17
Moyenne	13,838	4,90	4,805	5,06	4,87	5,085

	t
Longueur mesurée....................	F — 1,2482
Corr. de F pour la température de 4°,84...	— 0,0262
Toise à la température de 4°,96	863,8880
Élasticité du fil	+ 0,0042
Longueur du pendule...............	F + 862,6702

Durée observée de l'oscill. en temps de la pendule.... 1ˢ,72494814

» » en temps moyen 1ˢ,7207441

Longueur corresp. du pendule simple.	$1305^{l},2209 + 2,9609\,\varepsilon$
Réduction au vide..................	$-0,2029 - 0,0005\,\varepsilon - 0,2028\,k$
Réduction au pendule composé.......	$+0,2377$
Réduction à F	$-862,6702$
Résultat de l'expérience	$F = 442,5855 + 2,9604\,\varepsilon - 0,2028\,k$

Expérience I.c.

1826, avril 9, $6^{h}.22^{m}$ T.S. — Baromètre $337^{l},52$ + 7°,6 C.

Coïncidences observées.		Amplitude μ.	Température. t'.	t'''.	Calcul. $1^{s}.00306920$.	Erreur.
	h m s		°	°	h m s	s
0	5.22.23,5	14,65	5,71	5,86	5.22.23,5011	−0,0011
648	33.13,5	13, 7			33.13,4998	+0,0002
1296	44. 3,5	12, 8	5,71	5,93	44. 3,4974	+0,0026
1946	54.55,5	11, 9			54.55,4999	+0,0001
2596	6. 5.47,5	11, 0	5,74	5,99	6. 5.47,5015	+0,0015
3246	16.39,5	10, 3			16.39,5023	−0,0023
3895	27.30,5	9, 6	5,79	6,04	27.30,4996	—0,0006
4545	38.22,5	8, 9			38.22,4991	+0,0009
5195	49.14,5	8, 3	5,82	6,06	49.14,4982	—0,0018
5846	7. 0. 7,5	7, 8			7. 0. 7,4999	+0,0001
6497	11. 0,5	7, 3	5,81	6,06	11. 0,5012	+0,0013

Mesure de la longueur du pendule.

	Vis du levier de contact.	e'.	e''.	e'''.	t'.	t''.
	t	°	°	°	°	°
Avant l'expérience.....	13,829	5,59	5,47	5,69	5,60	5,80
Après l'expérience....	13,801	5,80	5,72	6,26	5,80	6,06
Moyenne.........	13,815	5,695	5,595	5,975	5,70	5,93

Longueur mesurée.........................	F — 1,2461
Correction de F pour la température 5°,63...	− 0,0305
Élasticité du fil..........................	+ 0,0014
Longueur du pendule............	F — 1,2142

Durée observée de l'oscill. en temps de la pendule.... $1^{s},00306920$

» » en temps moyen.......... $1^{s},0006282$

Longueur corresp. du pendule simple..		$\overset{l}{441,3640} + 1,0013\varepsilon$
Réduction au vide..................		$-\ 0,0685 - 0,0002\varepsilon - 0,0685\lambda$
Réduction au pendule composé.......		$-\ 0,0410$
Réduction à F.................... .		$+\ 1,2142$
Résultat de l'expérience	F	$+\ 442,4687 + 1,0011\varepsilon - 0,0685\lambda$

Expérience I.d.

1826, avril 10. $4^h 23^m$ T.S. Baromètre $335^l,97 + 9°,1$ C.

	Coïncidences observées.	Amplitude μ.	Température. t'.	t''.	Calcul $1^s,00306809$.	Erreur.
	h m s		°	°	h m s	s
0	3.24.18,5	13,5	6,14	6,37	3.24.18,5048	+ 0,0048
648	35. 8,5	12,7			35. 8,5008	+ 0,0008
1297	45.59,5	11,9	6,19	6,43	45.59,4990	− 0,0010
1947	56.51,5	11,0			56.51,4994	− 0,0006
2596	4. 7.42,5	10,3	6,25	6,54	4. 7.42,4951	− 0,0049
3247	18.35,5	9,7			18.35,4975	− 0,0025
3898	29.28,5	9,0	6,31	6,63	29.28,4993	− 0,0007
4549	40.21,5	8,4			40.21,5007	+ 0,0007
5199	51.13,5	7,9	6,31	6,68	51.13,4985	− 0,0015
5851	5. 2. 7,5	7,4			5. 2. 7,5022	+ 0,0022
6502	13. 0,5	7,0	6,34	6,74	13. 0,5026	+ 0,0026

Mesure de la longueur du pendule.

	Vis du levier de contact.	e'.	e''.	e'''.	t'.	t''.
	l	°	°	°	°	°
Avant l'expérience..	13,756	5,92	6,02	6,53	6,11	6,40
Après l'expérience...	13,753	6,21	6,26	6,97	6,39	6,74
Moyenne.......	13,7545	6,065	6,14	6,75	6,25	6,57

Longueur mesurée..........................	F	− 1,2407
Correction de F pour la température 6°,11...		+ 0,0331
Élasticité du fil............................		+ 0,0014
Longueur du pendule.............	F	− 1,2062

Durée observée de l'oscill. en temps de la pendule. $1^s,00306809$

» » en temps moyen....... $1^s,0006270$

Longueur corresp. du pendule simple..	$441^{l},3630+1,0013\varepsilon$
Réduction au vide..................	$-\ 0,0681-0,0002\varepsilon-0,0680k$
Réduction au pendule composé.....	$-\ 0,0410$
Réduction à F.....................	$+\ 1,2062$
Résultat de l'expérience.......	$F=442,4601+1,0011\varepsilon-0,0680k$

Expérience I.*c*.

1826, avril 10, $23^h 52^m$ T.S. — Baromètre $336^l,40+7°,5$ C.

Coïncidences observées.

	h m s		h m s		h m s
0	22.46.28	560	23. 2.34	1040	23.16.22
80	48.46	571	2.53	1080	17.31
91	49. 5	600	3.43	1120	18.40
120	49.55	611	4. 2	1131	18.59
160	51. 4	640	4.52	1160	19.49
240	53.22	651	5.11	1200	20.58
		720	7.10		
		731	7.29		
$115\frac{1}{6}$	$22.49.46\frac{2}{3}$	$635\frac{1}{2}$	$23.\ 4.44\frac{1}{4}$	$1121\frac{5}{6}$	$23.18.43\frac{1}{6}$

	h m s		h m s		h m s
1520	23.30.10	2029	23.44.48	2520	23.58.55
1531	30.29	2040	45. 7	2589	0. 0.54
1549	31. 0	2080	46.16	2600	1.13
1560	31.19	2109	47. 6	2669	3.12
1600	32,28	2120	47.25	2680	3.31
1629	33.18	2189	49.24	2749	5.30
1640	33.37	2200	49.43		
1680	34.46	2240	50.52		
$1588\frac{5}{8}$	$23.32.\ 8\frac{3}{8}$	$2125\frac{7}{8}$	$23.47.35\frac{1}{8}$	$2634\frac{1}{2}$	0. 2.12,5

	h m s		h m s		h m s
3029	0.13.33	3549	0.28.30	4007	0.41.40
3040	13.52	3560	28.49	4018	41.59
3069	14.42	3589	29.39	4029	42.18
3080	15. 1	3629	30.48	4058	43. 8
3109	15.51	3658	31.38	4069	43.27
3149	17. 0	3669	31.57	4087	43.58
3160	17 19	3709	33. 6	4098	44.17
3189	18. 9	3738	33 56	4109	44.36
3229	19.18	3749	34.15	4138	45.26
3240	19.37	3778	35. 5	4167	46.16
3129,4	0.16.26,2	3662,8	0.31.46,3	4078	0.43.42,5

	Moyennes réduites des observations.	Ampl. μ.	Température. t.	t'''.	Calcul $1^s,72497638$.	Erreur.
	h m s		°	°	h m s	s
120	22.49.55,0041	39,5	6,66	6,96	22.49.55,0091	− 0,0050
620	23. 4.17,5128	34,6			23. 4.17,5080	− 0,0048
1120	18.40,0042	30,5	6,71	7,02	18.40,0045	− 0,0003
1620	33. 2,4962	26,8			33. 2,4992	− 0,0030
2120	47.24,9907	23,9	6,74	7,08	47.24,9925	+ 0,0018
2620	0. 1.47,4878	21,6			0. 1.47,4850	− 0,0028
3120	16. 9,9852	19,3	6,75	7,17	16. 9,9768	− 0,0084
3620	30.32,4700	17,3			30.32,4680	− 0,0020
4120	44.54,9500	15,7	6,78	7,26	44.54,9589	− 0,0089

Mesure de la longueur du pendule.

	Vis du levier de contact.	e'.	e''.	e'''.	t'.	t'''.
	t	°	°	°	°	°
Avant l'expérience ..	13,572	6,55	6,49	6,97	6,65	6,94
Après l'expérience ..	13,574	6,69	6,64	7,11	6,79	7,28
Moyenne	13,573	6,62	6,565	7,04	6,72	7,11

Longueur mesurée.....................	F − 1,2243
Corr. de F pour la température de 6°,58.	+ 0,0356
Toise à la température de 6°,85	863,9066
Elasticité du fil	+ 0,0042
Longueur du pendule	F − 862,7221

Durée observée de l'oscill. en temps de la pendule. $1^s,72497638$

» » en temps moyen .... $1^s,7207676$

Longueur corresp. du pendule simple .	$1305^l,2566 + 2,9610\,\varepsilon$
Réduction au vide	$-\ 0,2012 - 0,0005\,\varepsilon - 0,2012\,k$
Réduction au pendule composé	$+\ 0,2378$
Réduction à F	$-862,7221$
Résultat de l'expérience	$F = 442,5711 + 2,9605\,\varepsilon - 0,2012\,k$

Expérience I. *f*.

1826, avril 12, $23^h 59^m$ T.S. Baromètre $332^l,19 + 9°,6$ C.

Coïncidences observées.

	h m s		h m s		h m s
0	22.52.26	520	23. 7.23	1011	23.21.30
40	53.35	531	7.42	1051	22,39
51	53.54	571	8.51	1080	23.29
91	55. 3	600	9.41	1091	23.48
120	55.53	611	10. 0	1160	25.47
131	56.12	640	10.50	1171	26. 6
		651	11. 9	1200	26.56
		680	11.59	1211	27.15
		691	12.18		
72 $\frac{1}{6}$	22.54.30,5	610 $\frac{5}{9}$	23. 9.59 $\frac{2}{9}$	1121 $\frac{7}{8}$	23.24.41 $\frac{1}{4}$

	h m s		h m s		h m s
1491	23.35.18	1971	23.49. 6	2491	0. 4. 3
1531	36.27	2011	50.15	2531	5.12
1542	36.46	2051	51.24	2542	5.31
1571	37.36	2091	52,33	2571	6.21
1611	38.45	2102	52.52	2611	7.30
1651	39.54	2131	53.42	2622	7.49
1662	40.13	2171	54.51	2651	8.39
1702	41.22	2182	55.10	2662	8.58
				2691	9.48
				2731	10.57
1595 $\frac{1}{8}$	23.38.17 $\frac{5}{8}$	2088 $\frac{3}{4}$	23.52.19 $\frac{1}{8}$	2610,3	0. 7.28,8

	h m s		h m s		h m s
3000	0.18.41	3491	0.32.48	4011	0.47.45
3011	19. 0	3502	33. 7	4022	48. 4
3022	19.19	3531	33.57	4080	49.44
3051	20. 9	3542	34.16	4091	50. 3
3062	20.28	3571	35. 6	4102	50.22
3091	21.18	3582	35.25	4171	52,21
3102	21.37	3611	36.15	4182	52.40
3131	22.27	3622	36.34	4251	54.39
3171	23.36	3651	37.24		
3182	23.55	3662	37.43		
3082,3	0.21. 3	3576,5	0.35.15.5	4113 $\frac{3}{4}$	0.50.42 $\frac{1}{4}$

	Moyennes réduites des observations.	Ampl. α.	Température. t	t'	Calcul. 1,729662	Erreur
	h m s		°	°	h m s	s
100	22.55.18,5125	39,9	7,75	8,57	22.55.18,5089	— 0,0036
600	23. 9.41,0140	34,6			23. 9.41,0174	+ 0,0034
1100	24. 3,5156	30,4	7,82	8,54	24. 3,5233	+ 0,0077
1600	38.26,0344	27,1			38.26,0275	— 0,0069
2100	52.48,5313	24,1	7,92	8,56	52.48,5303	— 0,0010
2600	0. 7.11,0325	21,5			0. 7.11,0323	— 0,0002
3100	21.33,5325	19,3	7,95	8,62	21.33,5334	+ 0,0009
3600	35.56,0375	17,3			35.56,0341	— 0,0034
4100	50.18,5313	15,5	7,99	8,72	50.18,5345	+ 0,0032

Mesure de la longueur du pendule.

	Vis du levier de contact.	e'.	e''.	e'''.	t'.	t''.
	l	°	°	°	°	°
Avant les expériences.	13,535	7,76	7,79	8,40	7,73	8,58
Après les expériences.	13,523	7,96	8,19	8,50	8,00	8,75
Moyenne..........	13,529	7,86	7,99	8,45	7,865	8,665

Longueur mesurée	F — 1,2201
Correction de F pour la tempér. 7°,94...	+ 0,0430
Toise à la température de 8°,26........	863,9205
Élasticité du fil	+ 0,0042
Longueur du pendule...............	F + 862,7476

Durée observée de l'oscill. en temps de la pendule.. 1s,7249952

» » en temps moyen....... 1s,7207957

Longueur corresp. du pendule simple.	1305l,2992 + 2,9611 ε
Réduction au vide......................	— 0,2008 — 0,0005 ε — 0,2007 k
Réduction au pendule composé.......	+ 0,2378
Réduction à F	— 862,7476
Résultat de l'expérience..........	F = 442,5886 + 2,9606 ε — 0,2007 k

Nota. — Le Mémoire original contient encore sept autres déterminations de F au moyen de la boule de laiton et du cylindre de déroulement; puis une deuxième série d'expériences avec la même boule suspendue de trois manières différentes; et enfin, une troisième série contenant trois déterminations complètes

avec la boule d'ivoire suspendue soit sur le cylindre de déroulement, soit à un couteau. Je n'ai pas cru nécessaire de reproduire ici les Tableaux de toutes ces expériences : ceux de la première suffisent pour en faire comprendre la disposition. Les nombres eux-mêmes n'auraient d'intérêt que pour les personnes qui voudraient reprendre les calculs de Bessel. (C.-W.)

EXPÉRIENCES

SUR LA

FORCE AVEC LAQUELLE LA TERRE ATTIRE LES CORPS

DE NATURE DIFFÉRENTE;

PAR F.-W. BESSEL.

[Extrait des *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour 1830 (1).]

L'un des principes expérimentaux sur lesquels Newton a fondé son système de la Pesanteur universelle est celui-ci, que la force avec laquelle la Terre attire les corps terrestres est proportionnelle à la masse de ces corps; en d'autres termes, que ces corps, sous l'influence de l'attraction de la Terre, reçoivent des accélérations égales. Ce principe, Newton l'a appuyé sur des expériences qui lui sont propres, dont la conclusion est que des corps de différente nature, l'or, l'argent, le plomb, le verre, le sable, le sel de cuisine, l'eau, le blé et le bois, exécutent des oscillations de même durée sur des arcs de cercle égaux. Quant à la limite de l'incertitude que laissent ces expériences sur l'égalité de la force accélératrice qui agit sur les corps qu'on vient de citer, Newton l'estime à un millième de la force totale.

C'est le désir de restreindre cette incertitude entre des limites plus étroites qui m'a fait entreprendre les expériences dont je vais rendre compte aujourd'hui. Il m'a semblé qu'il n'était pas superflu d'employer une méthode propre à manifester une différence entre les différents corps, fût-elle beaucoup moindre qu'un

(1) Ce Mémoire fut présenté à l'Académie le 23 février 1832, mais, en raison de son importance, publié dans le volume de 1830, alors en cours d'impression. Les expériences avaient été faites dans le courant de l'année 1828.

millième. Car le système de Newton n'est pas mathématiquement nécessaire; son existence réelle comme système de la nature ne peut être démontrée d'une manière absolue; elle ne peut être établie qu'avec un degré de probabilité qui dépend de l'exactitude des expériences. J'ai déterminé l'action de la pesanteur sur douze substances : l'or, l'argent, le plomb, le fer, le zinc, le laiton, le marbre, l'argile, le quartz, l'eau, le fer météorique et la pierre météorique. J'ai désiré faire figurer ces deux dernières substances dans la liste de celles que j'ai essayées, parce qu'il est possible qu'elles ne soient pas d'origine terrestre, et qu'il est possible de concevoir une différence d'action de la pesanteur sur les corps terrestres et les corps extra-terrestres. Si j'ai pu réaliser mon désir, je le dois à l'obligeance de M. le professeur Weiss, qui, sur la demande de M. Léopold de Buch, a mis à ma disposition de beaux et rares échantillons de la Collection minéralogique de Berlin. Ce sont de gros fragments des pierres météoriques de l'Aigle, du fer météorique de Brera, du fer de Sibérie de Pallas, et du fer de Durango, recueilli par Humboldt, qui me furent remis avec l'autorisation de leur donner telle forme qu'exigeraient mes expériences.

1. Voici quelle était la disposition des expériences de Newton : il suspendit l'un près de l'autre deux corps ronds et creux, en bois, de même forme et de même dimension, à des fils de 11 pieds de long; il remplit l'un de bois, dans l'autre il enferma un poids égal de la substance à étudier, de telle façon que la distance du centre d'oscillation au point de suspension fût aussi exactement que possible la même pour les deux pendules. L'égalité de durée des oscillations démontrait alors *immédiatement* la proportionnalité des masses aux attractions exercées sur les deux pendules. En effet, puisque les longueurs des pendules étaient les mêmes, puisque l'influence de l'air sur leurs durées d'oscillation était rendue identique par la disposition donnée à l'appareil, il n'était nécessaire ni de mesurer les longueurs, ni de corriger les résultats de l'influence de l'air pour les rendre comparables. Les expériences possédaient ainsi le plus haut degré de simplicité, puisqu'elles n'exigeaient la connaissance d'aucun élément étranger au but direct des recherches.

Quelque désirable que soit sans doute une telle simplicité, j'ai

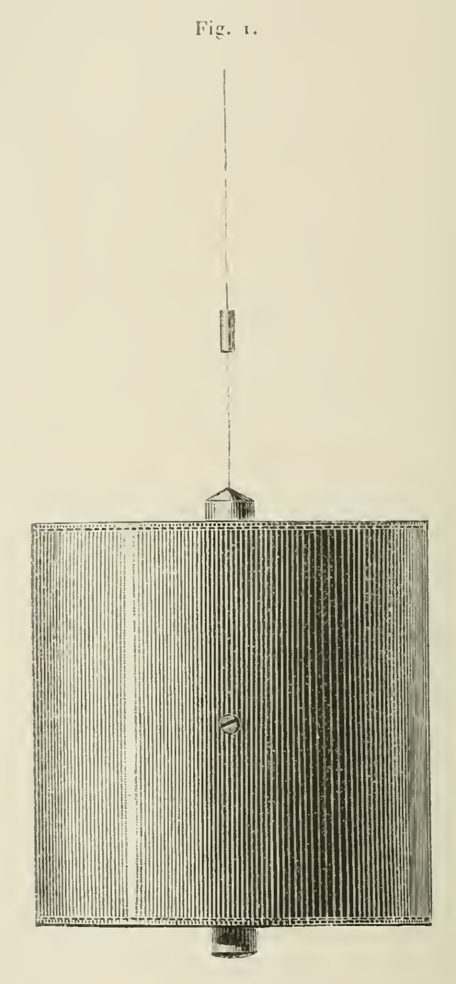
dû cependant donner à mes expériences une autre disposition : il fallait avant tout écarter l'incertitude qui résulte nécessairement de la difficulté de connaître exactement la position du centre d'oscillation. Je me suis, en conséquence, proposé d'obtenir le résultat de mes recherches sans être obligé de déterminer d'après sa forme extérieure le centre de gravité de la masse oscillante.

La même méthode, par laquelle j'ai déterminé la longueur du pendule simple à secondes, pour l'observatoire de Kœnigsberg, m'a paru devoir être ici encore particulièrement avantageuse, parce qu'elle donne le résultat par la différence de longueur de deux pendules, dont on observe les durées d'oscillation, sans exiger la connaissance des longueurs mêmes de ces pendules. L'emploi de cette méthode permettait d'obtenir un résultat exact même pour des substances auxquelles on ne peut donner que par à peu près une forme régulière. Elle assurerait en effet la même exactitude pour toute forme quelconque du corps oscillant, si on le faisait osciller non seulement à l'extrémité de deux fils dont les longueurs diffèrent d'une toise, mais encore au bout d'un troisième fil le plus court possible. Mais l'avantage que l'on obtient par ce troisième mode de suspension, c'est-à-dire l'élimination du moment d'inertie du corps oscillant, n'augmente en réalité la certitude du résultat que d'une quantité d'autant moindre que la longueur des deux autres fils est plus considérable auprès des dimensions du corps oscillant. Dans mes expériences, le rapport de ces dimensions est tel qu'il n'y avait aucune difficulté à déterminer la forme des corps oscillants avec une approximation qui donnait toute la sûreté nécessaire au calcul de leur moment d'inertie.

En conséquence, j'ai employé à ces nouvelles expériences la méthode que j'avais suivie antérieurement et aussi le bel appareil de Repsold, qui reste, après la mort de cet artiste, comme un monument de son admirable talent, et j'ai suivi autant qu'il a été possible les procédés que j'ai décrits dans mon Mémoire *Sur la détermination de la longueur du pendule simple à secondes*. J'ai dû néanmoins modifier l'appareil en *un seul* point : au lieu des boules de laiton et d'ivoire que j'avais fait osciller précédemment, il m'a fallu suspendre au fil un cylindre creux, dans l'intérieur duquel pouvaient être enfermés les corps sur lesquels on voulait expérimenter. Le motif de ce changement est d'abord qu'il eût été diffi-

cile, pour ne pas dire impossible, de donner aux différents corps une forme qui permît de les fixer immédiatement aux fils du pendule et de mesurer avec précision les différences de hauteur dans les expériences correspondantes. En second lieu, pour rendre les résultats indépendants de l'influence de l'air sur le mouvement du pendule, il fallait assurer l'identité de forme extérieure des différents corps oscillants.

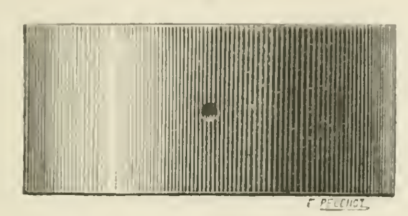
Fig. 1.



Le cylindre creux que j'ai employé, et qui est représenté en vraie grandeur dans la figure ci-dessus (*fig.* 1), est un des derniers

ouvrages de Repsold, et il a toute la perfection des œuvres de ce grand artiste. Il est construit en laiton; sa hauteur et son diamètre sont d'environ 2 pouces de Paris; aux deux extrémités, il est fermé par deux plaques adaptées à vis, qui laissent libre à l'intérieur un espace exactement cylindrique, et qui le ferment si exactement que les lignes de séparation figurées dans le dessin n'étaient pas visibles à l'origine, et ne le sont devenues qu'à peine après un fréquent usage. Dans la cavité de ce cylindre peuvent se loger des morceaux cylindriques des matières à expérimenter (*fig.* 2) que

Fig. 2.



l'on fixe ensuite avec deux petites vis qui traversent les parois courbes du cylindre, de façon que le cylindre creux et son contenu ne forment, pendant les expériences sur une substance, qu'un seul corps solide.

Le cylindre creux peut aussi être rempli d'eau, sans en laisser échapper. Dans les deux plaques de fond, on a taraudé des pas de vis, dont l'un peut recevoir la pince du fil du pendule, l'autre une pièce arrondie de laiton, que j'appellerai la *pointe*. Ces deux pièces peuvent être échangées, ce qui permet de retourner bout pour bout le cylindre creux avec le corps qu'il contient. Comme le centre de gravité prend par ce retournement deux positions symétriques de part et d'autre du centre de figure, la moyenne de deux expériences faites avant et après un retournement donne la durée d'oscillation d'un pendule dont le centre de gravité coïnciderait avec le centre de figure du cylindre creux.

Grâce à cette disposition, il devient possible de mesurer les longueurs mêmes des deux pendules. Bien que la méthode ne suppose pas connues ces deux longueurs, mais seulement leur différence, il est néanmoins avantageux d'ordonner les expériences de manière à rendre possible la comparaison des longueurs mesurées

de deux pendules entre elles, aussi bien qu'avec le résultat déduit de leur différence. On obtient en effet ainsi un contrôle qui mettrait en évidence tout changement accidentel de la distance de l'appareil micrométrique au moyen duquel on mesure la hauteur du point le plus bas du pendule au plan du support auquel est suspendu le pendule; et un tel contrôle est précieux dans des recherches que l'on doit désirer étendre à un grand nombre de corps, plutôt que de multiplier les expériences sur chacun d'eux. Mais, pour obtenir un contrôle réel, il fallait encore modifier en un autre point l'ordonnance des expériences antérieures : il fallait en effet que la distance de l'appareil micrométrique au plan du cadre de suspension pût être mesurée, avant et après chaque détermination de la longueur du pendule à secondes, pour chacune des substances étudiées, à l'aide de l'appareil que j'ai décrit dans l'art. 28 de mon précédent Mémoire.

Cette mesure nous procure encore un autre avantage, car on se rend ainsi indépendant de l'hypothèse d'une invariabilité absolue de l'appareil micrométrique; les expériences faites avec chacun des pendules, quel que soit l'intervalle de temps qui les sépare, peuvent être comparées les unes aux autres, si bien que, par la combinaison des expériences faites avec des charges fortes et faibles du cylindre creux, on peut déterminer séparément pour chaque pendule la grandeur du coefficient k qui représente l'influence du mouvement de l'air. Une différence dans la valeur de ce coefficient pour le pendule court et pour le long pendule, n'a sans doute aucune influence sur le résultat final, qu'on obtiendrait tout aussi exact sans tenir compte de cette différence; mais il semble qu'il n'est pas sans intérêt de déterminer expérimentalement la variation que peut produire, dans la valeur du coefficient k, le fait de faire osciller un seul et même corps à l'extrémité de fils de différentes longueurs.

2. Je vais dire d'abord comment j'ai mesuré la distance de l'appareil micrométrique au plan sur lequel repose le couteau. J'ai employé pour cela la règle d'acier, décrite à l'art. 28 de mon précédent Mémoire, qui se termine à un bout par un plan perpendiculaire à son axe et à l'autre par une surface sphérique; contre la face plane est pressé par un fort ressort un cylindre d'acier de

1 ligne de diamètre et de 3 lignes de long, qui fait saillie des deux côtés de la règle, et peut reposer par ces prolongements sur le plan entaillé à l'extrémité du cylindre fixé au cadre de suspension (*fig.* 5 et 6 du précédent Mémoire). L'extrémité supérieure de la règle coïncide alors avec ce plan et se trouve ainsi à la hauteur même à laquelle est l'arête du couteau pendant les expériences; l'extrémité inférieure, arrondie, est amenée en contact avec le levier de l'appareil micrométrique, ce qui détermine la distance de ce levier au plan de suspension.

J'ai mesuré par deux fois la longueur de la règle d'acier. La première mesure, que j'ai rapportée dans mon précédent Mémoire, a donné la double longueur de la règle, à la température de 4°,04 C., plus grande de $41^{l},9882$ que la longueur de la toise à la même température. La deuxième mesure, faite en juillet 1828, a montré que la double longueur de la règle, à la température de 23°,33 C., excède de $42^{l},0071$ la longueur de la toise à la même température. Pour déduire de là la longueur de la règle, j'ai pris la dilatation de la toise telle que l'ont donnée les expériences du pendule (art. 22), savoir 0,00001167 pour chaque degré centésimal, d'où l'on conclut sa longueur à la température τ

$$863^{l},9992\,\frac{1+\tau.0,00001167}{1+16,25.0,00001167} \quad \text{ou} \quad 863^{l},83538+\tau.0^{l},010081.$$

De là la longueur de la règle

à	4°,04	$452^{l},93215$
à	23°,33	$453^{l},03885$

et pour une température τ

$$452^{l},9098+\tau.0^{l},0055314.$$

La dilatation de la règle d'acier qui résulte de ces mesures, savoir 0,0000122 de sa longueur pour chaque degré du thermomètre, concorde très bien avec celle qu'a donnée Troughton, 0,0000119.

La température de la règle, pendant qu'on en faisait usage, était donnée par deux thermomètres suspendus dans la boîte de l'appareil du pendule, l'un à la partie supérieure de la règle, l'autre à l'extrémité inférieure. La température de l'appareil du pendule

lui-même, qui est donnée par les thermomètres e' et e'' encastrés dans la barre de fer de cet appareil, exerce sur la valeur de la distance cherchée une influence qui, d'après les données de l'appendice IV du précédent Mémoire (tome V de ce *Recueil*, p. 25), et en négligeant la boule du pendule dans l'expression qui y est donnée, devient $+ 0^l,0037922\,e' + 0^l,0018484\,e''$; ou bien, si l'on pose

$$\tau' = 0,6723\,e' + 0,3277\,e'',$$

et si l'on désigne par G la valeur de la distance pour $\tau' = 0$, cette distance pour une autre valeur de τ' devient

$$G + \tau'.0^l,0056406.$$

On a donc

$$G - \tau'.0^l,0056406 = 452^l,9098 + \tau.0^l,0055314 + fp,$$

où f est la lecture de l'échelle de la vis micrométrique pour laquelle le levier vient toucher le bout inférieur de la règle, et p la valeur du tour de vis $= 0^l,0902$.

C'est de cette manière que j'ai déterminé la valeur de G au commencement et à la fin de chaque série d'observations relatives à une des substances à étudier, et j'ai employé au calcul de cette série la moyenne des deux déterminations. Je donne ici le Tableau de toutes les mesures.

	Température de la règle.			Lecture de la vis	Température de l'appareil.			
1828.	En bas.	En haut.	τ.	micrométrique.	e′.	e″.	τ′.	G.
	°	°	°	l	°	°	°	l
Avril 23...	10,37	10,99	10,68	17,920	10,44	10,89	10,58	454,52
25...	10,87	11,26	11,065	17,9185	11,01	11,37	11,13	454,52
27...	10,73	11,21	10,97	17,9435	10,82	11,22	10,95	454,52
29...	10,46	10,93	10,695	17,9715	10,52	10,88	10,64	454,53
Mai 3...	9,84	9,99	9,915	17,965	9,73	10,15	9,87	454,52
6...	11,04	11,46	11,25	17,997	11,16	11,42	11,25	454,53
9...	11,57	12,01	11,79	17,991	11,70	12,14	11,84	454,53
11...	11,57	12,09	11,83	17,9785	11,70	11,95	11,78	454,53
14...	10,01	10,13	10,07	17,991	10,22	10,45	10,30	454,53
18...	8,24	8,28	8,26	17,9985	8,25	8,39	8,30	454,53
22...	10,46	10,77	10,615	17,994	10,42	10,69	10,51	454,53
24...	12,38	13,12	12,75	17,974	12,33	12,81	12,49	454,53
27...	15,06	15,87	15,465	17,9555	15,01	15,57	15,19	454,53
30...	17,01	17,77	17,39	17,926	16,89	17,46	17,08	454,52

1825.	Température de la règle. En bas.	En haut.	τ.	Lecture de la vis micrométrique.	Température de l'appareil. e'.	e''.	τ.	G.
	°	°	°	l	°	°	°	l
Juin 1	17,96	18,82	18,39	17,914	17,91	18,63	18,15	454,5249
2..	16,90	17,66	17,28	17,8075	16,94	17,46	17,13	454,5150
4..	17,57	18,22	17,895	17,818	17,57	18,19	17,77	454,5153
7..	18,07	18,71	18,39	17,897	18,05	18,53	18,21	454,5168
9..	15,06	15,79	15,425	17,8275	15,30	15,81	15,47	454,5158
11..	14,90	15,29	15,095	17,831	15,01	15,33	15,11	454,5165
21..	17,06	17,72	17,39	17,833	16,94	17,46	17,11	454,5180
24..	16,98	17,55	17,265	17,837	17,03	17,51	17,19	454,5172
27..	17,29	17,89	17,59	17,835	17,32	17,65	17,45	454,5174
29..	18,51	19,21	18,86	17,8275	18,54	19,12	18,73	454,5164
Juillet 1..	18,63	19,21	18,92	17,836	18,68	19,16	18,84	454,5170
3..	18,84	19,49	19,165	17,8495	19,07	19,51	19,22	454,5174
6..	21,57	22,36	21,965	17,8255	21,52	22,11	21,71	454,5164
8..	20,63	21,48	21,055	17,847	20,64	21,24	20,84	454,5186

Le 1er juin, il y avait un peu de poussière sur le levier de contact, il me fallut le dévisser et le nettoyer. Les autres différences qui se remarquent dans les nombres de la dernière colonne proviennent probablement de différences entre les températures indiquées par les thermomètres et les températures vraies de la règle et de l'appareil, bien qu'on n'ait jamais fait aucune mesure que plusieurs heures après avoir suspendu la règle et fermé la boîte du pendule. Les mesures en elles-mêmes doivent être regardées comme exactes à moins de $0^l,001$, puisque l'appareil micrométrique donne sûrement des fractions encore plus petites.

La longueur du pendule n'est mesurée immédiatement par les valeurs de G données dans le Tableau précédent, qu'autant que le pendule a le même poids que la règle, 11560 grains; s'il est plus léger, il tire moins fortement sur le cadre de suspension, et son extrémité supérieure est placée plus haut que celle de la règle; il faut donc augmenter la valeur de G. J'ai trouvé qu'une diminution de poids de la règle de 12 onces, ou 5760 grains, relève son point d'appui supérieur de $0^l,023$, soit $0^l,00207$. D'après cela, si M est le poids du pendule que l'on veut mesurer, il faut, au lieu de la valeur directement mesurée de G, employer celle-ci

$$G + 0^l,00207\,\frac{11560 - M}{5760}.$$

3. Pour utiliser ces mesures dans nos recherches, il faut encore déterminer la distance de la *pointe* au centre de figure du cylindre creux. Si l'on retranche cette distance de la longueur mesurée du pendule, le reste est la distance du centre du cylindre au plan sur lequel repose le couteau; la moyenne de deux semblables déterminations, faites avant et après le retournement du cylindre, est la moyenne des distances du centre de gravité du cylindre et de son contenu à l'arête du couteau. Ceci suppose évidemment que la pointe a été, dans les deux mesures, vissée jusqu'au même point dans les plaques de fond du cylindre, ce qui n'offre pas de difficulté, puisqu'on la visse jusqu'à ce que sa base touche ces plaques. Une variation accidentelle de la longueur du fil dans le retournement du cylindre est sans influence.

J'ai mesuré la distance de la *pointe* au fond du cylindre par le procédé que j'avais employé (art. 28 du précédent Mémoire) pour la mesure du diamètre de la boule du pendule. La hauteur totale du cylindre s'était trouvée de $24^l,11775$ par des mesures répétées et bien concordantes dans leur résultat avec le nombre donné par Repsold, à la température de la glace fondante; la hauteur de la pointe au-dessus du fond du cylindre était de $1^l,8215$, la distance de la pointe au centre de figure du cylindre était donc de $13^l,8804$. Quant à l'influence de la température sur cette distance, j'en ai tenu compte dans les calculs, en supposant que le cylindre creux et son contenu avaient la même température que les parties de l'appareil situées à la même hauteur. J'ai donc pris pour cette température (art. 7 du précédent Mémoire)

$$\frac{584 - h}{388} e' + \frac{h - 196}{388} e'',$$

où $h = 112^l,4$, demi-somme des hauteurs de la pointe et du centre du cylindre au-dessus du fond de la boîte du pendule. Si l'on prend la dilatation du métal du cylindre pour un degré centésimal égale à $0,000018782$, on a, pour la distance de la pointe au centre de figure,

$$13^l,8804 + e'.0^l,0003169 - e''.0^l,0000562.$$

C'est la quantité qu'il faut retrancher de la valeur de G correspondante aux indications thermométriques e' et e'', si l'on veut comparer ce que donne la mesure du pendule au moyen de la vis

micrométrique, avec la durée d'oscillation réduite du centre d'oscillation au centre de figure du cylindre. On obtient de cette manière pour longueur L du pendule court, comptée de l'arête du couteau au centre de figure du cylindre,

$$L = -fp + F + 0^l,0053709(0,6460\,e' + 0,3540\,e''),$$

F ayant pour valeur

$$G - 13^l,8804 + 0^l,00207\,\frac{11560 - M}{5760}.$$

f est la lecture du tambour de la vis micrométrique pour laquelle le levier est en contact exact avec la pointe du cylindre. Pour le long pendule, on ajoutera la longueur de la toise correspondante à la température de l'expérience. Dans le calcul des expériences suivantes, j'ai pris cette longueur conformément à la formule du paragraphe précédent, avec la température (art. 7 du précédent Mémoire)

$$= 0,4095\,e'' + 0,5905\,e'''.$$

4. J'arrive maintenant à la composition des pendules que j'ai employés. Je les considère comme formés de quatre parties, savoir : le couteau réuni à la pince du fil qui y est vissée; le fil; le cylindre de coïncidence; le cylindre creux, auquel je réunis la pince du fil, la pointe et le corps qui y est contenu. Je désigne par $m^{(1)}$, $m^{(2)}$, $m^{(3)}$, $m^{(4)}$ les poids de ces différentes parties dans le vide; j'appelle $s^{(1)}$, $s^{(2)}$, $s^{(3)}$ et $s^{(4)}$ les distances de leurs centres de gravité à l'arête du couteau; et $\mu^{(1)}$, $\mu^{(2)}$, $\mu^{(3)}$ et $\mu^{(4)}$ leurs moments d'inertie par rapport à des axes horizontaux menés par leurs centres de gravité.

1° *Le couteau, avec la pince du fil.* — Par le procédé décrit dans l'Appendice VII du précédent Mémoire, et par les pesées nécessaires, j'ai trouvé

$$m^{(1)} = 255,91, \qquad s^{(1)} = 0^l,812, \qquad \mu^{(1)} = 11858 + \tau.0,41.$$

Les unités auxquelles j'ai rapporté ici les mesures, ainsi que dans ce qui va suivre, sont, pour m le grain de Prusse, pour s la ligne de Paris, pour μ le produit du carré de la ligne de Paris par le grain de Prusse. J'ai indiqué en même temps la petite variation que subit la valeur de $\mu^{(1)}$ en raison de la température.

2° *Le fil.* — La base de la pince du fil qui est vissée dans la monture du couteau est à une distance de l'arête égale à $10^l,192$, et le fil est coupé à l'extrémité de la vis de cette pince, à $0^l,95$ au-dessus de la base. Si l'on désigne par r la longueur du fil, les distances de ses deux bouts à l'arête du couteau sont

$$9^l,242 \quad \text{et} \quad 9^l,242 + r.$$

On a employé au commencement des fils plus forts; plus tard, à partir du 1ᵉʳ juillet, des fils plus fins. Avec les premiers, on a, pour les deux pendules,

$$m^{(2)} = \begin{cases} 11,28 \\ 3,69 \end{cases}, \qquad s^{(2)} = 9^l242 + \tfrac{1}{2}r, \qquad \mu^{(2)} = \begin{cases} 11,28 \\ 3,69 \end{cases} \frac{rr}{12},$$

et avec les derniers,

$$m^{(2)} = \begin{cases} 6,19 \\ 2,06 \end{cases}, \qquad s^{(2)} = 9^l,242 + \tfrac{1}{2}r, \qquad \mu^{(2)} = \begin{cases} 6,19 \\ 2,06 \end{cases} \frac{rr}{12}.$$

3° *Le cylindre de coïncidence.* — On a encore fait usage des petits cylindres employés dans les expériences antérieures; cependant une nouvelle couche de peinture noire en a un peu altéré les poids,

$$m^{(3)} = \begin{cases} 3,68 \\ 3,82 \end{cases}, \qquad s^{(3)} = \begin{cases} 1277,8 \\ 413,8 \end{cases}, \qquad \mu^{(3)} = \begin{cases} 2 \\ 2 \end{cases}.$$

4° *Le cylindre creux, y compris la pince, la pointe et le corps qui y est renfermé.* — Le cylindre est, ainsi que je l'ai déjà dit, fermé à ses deux bouts par des plaques de fond à vis, dans lesquelles sont fixées la pince du fil et la pointe. Les poids de ces trois parties sont respectivement 3933,05 grains, 18,86 grains et 19,49 grains. Les dimensions du cylindre même sont :

	l	
Hauteur extérieure...	24,11775	épaisseur des fonds $= 1^l,09667$,
Hauteur intérieure ...	21,92441	
Diamètre extérieur ...	23,94580	épaisseur de la paroi $= 0^l,96571$.
Diamètre intérieur ...	22,01438	

Les deux trous taraudés dans les plaques de fond pour recevoir la pince et la pointe peuvent être regardés comme cylindriques, avec un diamètre de $1^l,5$. Si l'on suppose le cylindre creux bien symétrique, son centre de gravité coïncide avec son centre de fi-

gure; son moment d'inertie est 513715,8, d'après le poids et les dimensions indiquées.

La pince, qui se visse dans le fond supérieur, a son centre de gravité à $0^l,6020$ au-dessus de la surface extérieure de ce fond, et son moment d'inertie, par rapport à ce centre de gravité, est 14,95; la pointe a son centre de gravité à $0^l,6943$ au-dessous de la face extérieure du fond inférieur, et son moment d'inertie est 16,85. Ces nombres sont déduits des dimensions de ces deux pièces combinées avec leurs poids; je n'entre pas dans le détail de ce calcul ni de ces mesures, qui sont sans intérêt aucun pour le résultat final des expériences.

L'ensemble des trois pièces pèse 3971,4 grains; leur centre de gravité commun est à $0^l,00246$ au-dessous du centre de figure du cylindre, et leur moment d'inertie, par rapport à ce dernier centre, est $519940,6 + \tau.19,53$. La distance de l'arête du couteau au centre de gravité du cylindre vide, y compris la pince et la pointe, résulte de la mesure du pendule (art. 3) et a pour valeur

$$L + 0^l,00246.$$

Cette mesure fait aussi connaître r; car, d'après les données précédentes, on a

$$L = 9^l,242 + r + 12^l,0589 - 0^l,95 = r + 20^l,3509,$$

ce qui permet de tirer du calcul la valeur de r. Au cylindre vide correspondent donc les valeurs

$$m = 3971,40, \qquad s = L + 0^l,00246, \qquad \mu = 519940,6 + \tau.19,53,$$

et, pour obtenir la composition complète du pendule, il n'y a plus qu'à tenir compte des corps enfermés dans la cavité du cylindre.

Ce sont, en somme, des cylindres plus ou moins bien travaillés. Supposons que l'un d'eux, dont je désignerai par m_1 le poids et par μ_1 le moment d'inertie, soit fixé dans le cylindre creux, de façon que son centre de gravité se trouve à une distance s_1 du centre de figure de ce cylindre, on aura

$$m' = 3971,40 + m_1,$$

$$s' = L + \frac{0,00246.3971,4 + s_1 m_1}{3971,4 + m_1},$$

$$\mu' = 519940,6 + \tau.19,53 + \mu_1 + \frac{3971,4.m_1.s_1 s_1 + m_1 m_1 (0,00246)^2}{3971,4 + m_1}.$$

Mais si, comme je l'ai toujours fait, on répète l'expérience après avoir retourné le cylindre, ce qui donne à s_1 un signe contraire, cette quantité disparaît de la moyenne des valeurs de $s^{(4)}$ pour les deux expériences. Si, de plus, s_1 est tellement petit que la partie de l'expression de $\mu^{(4)}$ qui contient $s_1 s_1$ soit insensible, la valeur de s_1 peut rester absolument inconnue. Or il résulte de la comparaison des expériences faites dans les deux positions du cylindre que s_1 atteint en effet ce degré de petitesse; la valeur simplifiée de $\mu^{(4)}$,

$$\mu^{(4)} = 519940,6 - z.19,53 + \mu_1,$$

peut donc être employée sans erreur sensible.

Si l'on désigne par $L + c$ la longueur du pendule simple, synchrone du pendule composé, on a, d'après l'Appendice VII du précédent Mémoire,

$$c = \frac{0^{l}.00246.3971,4}{3971,4 + m_1} + \frac{\Sigma\mu - m^{(1)}s^{(1)}(s^{(4)} - s^{(1)}) - m^{(2)}s^{(2)}(s^{(4)} - s^{(2)}) - \ldots}{m^{(1)}s^{(1)} + m^{(2)}s^{(2)} + m^{(3)}s^{(3)} + m^{(4)}s^{(4)}}.$$

A cette valeur de c, il faut encore ajouter la correction qui résulte de la flexibilité du fil, et qui a été développée dans l'Appendice VII. La longueur du fil que j'y ai désignée par a est comptée ici de l'arête du couteau à la pince du fil vissée dans le cylindre creux et a pour valeur $L - 14^{l},02$; s est égal à $14,02$ avec une approximation suffisante, et le μ de la formule devient

$$\frac{519940.6 + z.19.53 + \mu_1}{3971,4 + m_1}.$$

On a donc, pour valeur de la correction à ajouter à c,

$$\frac{(L - 14,02)\mu\mu}{14,02.L^3}.$$

5. Le calcul des expériences exige la connaissance des masses et des moments d'inertie des corps enfermés dans la cavité du cylindre. On les a déduits des données suivantes.

Repsold m'a fourni les cylindres de laiton, de fer, de zinc et de plomb, qui sont par conséquent de forme parfaitement régulière; on n'a pas pu donner aux autres substances une forme cylindrique aussi parfaite; mais, comme les irrégularités de leurs figures n'ont qu'une faible influence sur les résultats, j'ai considéré la forme

cylindrique approximative qu'on leur a donnée comme suffisante pour le calcul des expériences, dans les limites d'exactitude de ces expériences mêmes.

1. *Laiton.*

On a employé trois cylindres de poids différents, et j'ai fait osciller aussi, sans y rien enfermer, le cylindre qui est fait du même métal. Mon but, en opérant ainsi sur des masses différentes d'une même matière, était d'obtenir les données nécessaires à la détermination de l'influence de l'air sur les durées d'oscillation. Le Tableau suivant donne les poids, en grains, des trois cylindres dans le vide et leurs dimensions à la température de la glace fondante.

	Poids.	Hauteur.	Diamètre.
	G	l	l
I	7466,15	12,6468	21,9973
II.........	3896,18	6,5180	21,8830
III........	1970,12	3,3190	21,8830

On déduit de là les valeurs de μ_1, en adoptant le coefficient de dilatation 0,00001878₂ :

$$325307,9 - \pi.12,22; \quad 130403,1 - \pi.4,90; \quad 60772,4 - \pi.2,28.$$

et, en combinant ces valeurs avec les données de l'art. 4 :

	$m^{(6)}$.	$s^{(6)} - L$.	$\mu^{(6)}$.
		l	
I	11437,55	− 0,0009	845248,5 − π.31,75
II	7867,58	+ 0,0012	650343,7 − π.24,43
III......	5941,52	0,0016	580713,0 + π.21,81
IV......	3971,40	− 0,0025	519940,6 − π.19,53

2. *Fer.*

Le poids du cylindre est 7466,19 grains; ses dimensions, à la température de la glace fondante, sont : hauteur, $13^{l},5245$; diamètre, $21^{l},99792$.

Dilatation adoptée, 0,0000114; $\mu_1 = 339614,2 + \pi.7,74$.

$m^{(6)}$.	$s^{(6)} - L$.	$\mu^{(6)}$.
11437,59	+ 0^{l},0009	859554,8 + π.27,27.

3. *Zinc.*

Le poids du cylindre est 7466,34 grains; ses dimensions, à la température de la glace fondante, sont: hauteur, $14^{l},65553$; diamètre, $21^{l},9898$.

Dilatation adoptée, 0,0000302; $\mu_1 = 359285,3 + \tau.21,70$.

$m^{(4)}$.	$s^{(4)} - L$.	$\mu^{(4)}$.
11437,74	$+0^{l},0009$	$879225,9 + \tau.41,23$.

4. *Plomb.*

Le poids du cylindre est 7465,79 grains; ses dimensions, à la température de la glace fondante, sont : hauteur, $9^{l},2994$; diamètre, $21^{l},9942$.

Dilatation adoptée, 0,0000315; $\mu_1 = 279523,9 + \tau.17,61$.

$m^{(4)}$.	$s^{(4)} - L$.	$\mu^{(4)}$.
11437,19	$+0^{l},0009$	$799464,5 + \tau.37,14$.

5. *Argent.*

Le corps avec lequel on a opéré est formé de 20 thalers de Prusse, mis en rouleau cylindrique et rendus adhérents par de la résine. Pour remplir l'intervalle compris entre ce rouleau et la paroi de l'enveloppe, on a employé de petites baguettes d'acajou convenablement travaillées; un petit espace, qui restait encore vide dans la hauteur, a été rempli de résine. L'enveloppe cylindrique et son contenu pouvaient, après le refroidissement, être regardés comme une masse solide. Le poids de l'ensemble des pièces de monnaie était de 7349,93 grains ; celui du remplissage, 122,30 grains. Les premières peuvent être considérées comme formant un cylindre dont les dimensions, à la température des expériences faites sur l'argent, sont : hauteur, $20^{l},3$; diamètre, $16^{l},8$; le reste comme un cylindre creux de $21^{l},92$ de haut, dont le diamètre extérieur était $22^{l},018$. On a donc, pour l'ensemble, $\mu_1 = 392815,6$.

$m^{(4)}$.	$s^{(4)} - L$.	$\mu^{(4)}$.
11443,63	$+0^{l},0009$	$912756,2 + \tau.19,53$.

6. *Or.*

On a formé, comme avec les monnaies d'argent, un rouleau de trente et un doubles frédérics d'or, que l'on a fixé dans le cylindre creux en y coulant de la résine. Le poids des pièces d'or était de 6825,64 grains; celui du remplissage, 622,14 grains. Les premières formaient un cylindre dont les dimensions, à la température des expériences, étaient : hauteur, $21^l,6$ et diamètre, $12^l,5$: le remplissage avait la forme d'un cylindre creux de $21^l,92$ de haut, et de $22^l,018$ de diamètre extérieur. On a donc, pour l'ensemble, $\mu_1 = 383875,0$.

$m^{(6)}$.	$s^{(6)} - L$.	$\mu^{(6)}$.
1149,18	$+ 0^l,0009$	$90185,6 + \varpi.19,53$.

7. *Fer météorique de Brera.*

De cet échantillon, qui s'est montré particulièrement rebelle au travail, on a fait un cylindre du poids de 7724,84 grains. Sa forme s'écartait notablement de celle d'un cylindre régulier; cependant, comme moyenne de mesures prises en un grand nombre de points, j'ai trouvé pour la hauteur $18^l,89$, et pour le diamètre 21,53 à la température des expériences; $\mu_1 = 453504,7$.

$m^{(7)}$.	$s^{(7)} - L$.	$\mu^{(7)}$.
1696,24	$+ 0^l,0009$	$97345,3 + \varpi.19,53$.

8. *Pierre météorique de l'Aigle.*

On a cimenté ensemble un gros morceau et plusieurs petits, dont on a fait un cylindre du poids de 4704,67 grains. Ses dimensions étaient : hauteur, $21^l,5$; diamètre, $21^l,2$; $\mu_1 = 313382,0$.

$m^{(8)}$.	$s^{(8)} - L$.	$\mu^{(8)}$.
8676,07	$+ 0^l,0012$	$83322,6 + \varpi.19,53$.

9. *Marbre.*

Le cylindre, qui a pu être travaillé sur le tour et avait par conséquent une forme régulière, pesait 4208,54 grains. Ses dimensions étaient : hauteur, $21^l,924$; diamètre, $21^l,968$; $\mu_1 = 295511,9$.

$m^{(9)}$.	$s^{(9)} - L$.	$\mu^{(9)}$.
8179,94	$+ 0^l,0012$	$81542,5 + \varpi.19,53$.

10. *Argile.*

Le cylindre, également travaillé sur le tour, pesait 2876,78 grains. Ses dimensions étaient : hauteur, $21^1,924$; diamètre, $21^1,900$; $\mu_1 = 201463,2$.

$m^{(4)}$.	$s^{(4)} - L$.	$\mu^{(4)}$.
6848,18	$+0^1.0014$	$721403,8 + \tau.19,53$.

11. *Quartz.*

N'ayant pu obtenir de cylindre d'une forme à peu près régulière, j'ai rempli le cylindre creux de quartz réduit en petits fragments; pour que ces fragments ne pussent se déplacer les uns par rapport aux autres, j'ai coulé dans la masse, fortement chauffée, de la cire fondue jusqu'à ce que tous les interstices fussent remplis. La masse qui remplissait ainsi la cavité du cylindre pesait 2409,02 grains; ses dimensions, à la température des expériences, étaient : hauteur, $21^1,9317$; diamètre, $22^1,0216$; $\mu_1 = 169577,4$.

$m^{(4)}$.	$s^{(4)} - L$.	$\mu^{(4)}$.
6380,42	$+0^1,0015$	$689518,0 + \tau.19,53$.

12. *Eau.*

Le cylindre creux fut rempli d'eau distillée à trois époques différentes ; on eut toujours soin de ne laisser aucune bulle d'air. Le premier remplissage eut lieu le 1er juin, où le cylindre reçut 1564,61 grains d'eau; le deuxième, le 22 juin, où le poids s'éleva à 1571,10 grains; et le dernier, le 4 juillet, où l'on trouva 1571,54 grains. Les valeurs de μ_1 qui se déduisent de là et des dimensions intérieures du cylindre aux températures correspondantes, sont : 110131,7, 110597 et 110641.

$m^{(4)}$.	$s^{(4)} - L$.	$\mu^{(4)}$.
5536,01	$+0^1,0018$	630418
5542,50	$+0,0018$	630893
5542,94	$+0,0018$	630982

Pour qu'on puisse apprécier la grandeur des erreurs que l'inexactitude des valeurs précédentes de μ_1 peut introduire dans

le résultat définitif, c'est-à-dire dans la longueur du pendule simple à secondes, et qu'on puisse juger de l'approximation avec laquelle ce résultat peut être obtenu, même par les expériences faites avec les matières auxquelles on n'a pu donner qu'imparfaitement la forme cylindrique, j'ajoute ici qu'il faudrait que l'erreur sur μ_1 s'élevât,

Pour l'argent à	$\frac{1}{27}$
l'or à..........................	$\frac{1}{26}$
le fer météorique à..............	$\frac{1}{30}$
la pierre météorique à...........	$\frac{1}{28}$
le quartz à.....................	$\frac{1}{20}$

pour qu'il en résultât une erreur de $0^{l},001$ sur la longueur du pendule à secondes. Or il n'est pas douteux que l'incertitude réelle de la valeur de μ_1 pour ces matières est de beaucoup inférieure à ces fractions.

6. La réduction au vide des durées d'oscillations observées, qui est exprimée par la formule de l'art. 14 du précédent Mémoire

$$L + c = \lambda tt \frac{1 - \frac{m's'}{ms}}{1 + \frac{m'}{m}k},$$

ou par son équivalent

$$L + c - \lambda tt = - \lambda tt \frac{m's'}{ms} - (L + c)\frac{m'}{m}k.$$

exige la connaissance de certaines données dont je vais maintenant m'occuper. Dans cette formule, t représente la durée d'oscillation du pendule, telle que la donne l'observation, m sa masse, s la distance de son centre de gravité au couteau, λ la longueur du pendule simple à secondes; m' est la masse de l'air déplacé, s' la distance au couteau du centre de gravité de cette masse. Je ne suppose pas que le coefficient k, qui doit se déduire de l'expérience, ait la même valeur pour les deux pendules; pour le long pendule, je le désignerai par k, et par k' pour le pendule court.

Si l'on appelle Δ la densité de l'air rapportée à celle de l'eau à son maximum de densité, et $\delta^{(1)}$, $\delta^{(2)}$, $\delta^{(3)}$, $\delta^{(4)}$ les densités des

quatre parties dont nous avons supposé les pendules formés (art. 4), on a

$$m's' = \left[\frac{m^{(1)}s^{(1)}}{\delta^{(1)}} + \frac{m^{(2)}s^{(2)}}{\delta^{(2)}} + \frac{m^{(3)}s^{(3)}}{\delta^{(3)}} + \frac{ms^{(4)}}{\delta^{(4)}}\right]\Delta,$$

$$ms = \left[m^{(1)}s^{(1)} + m^{(2)}s^{(2)} + m^{(3)}s^{(3)} + m^{(4)}s^{(4)}\right],$$

$$m' = \left[\frac{m^{(1)}}{\delta^{(1)}} + \frac{m^{(2)}}{\delta^{(2)}} + \frac{m^{(3)}}{\delta^{(3)}} + \frac{m}{\delta^{(4)}}\right]\Delta,$$

$$m = m^{(1)} + m^{(2)} + m^{(3)} + m^{(4)}.$$

m, dans les seconds membres des expressions de $m's'$ et de m', est la masse du cylindre vide et $\delta^{(4)}$ sa densité.

Les valeurs de $m^{(1)}$, $m^{(2)}$, $m^{(3)}$ et $m^{(4)}$ et des deux parties de m et de m_1, dont la somme est égale à $m^{(4)}$, ont été données dans les art. 4 et 5, en même temps que celles de $s^{(1)}$, $s^{(2)}$, $s^{(3)}$ et $s^{(4)}$. J'ai pris de plus, pour la température de la glace fondante,

$$\delta^{(1)} = 7{,}755, \qquad \delta^{(2)} = 7{,}6, \qquad \delta^{(3)} = 8{,}4, \qquad \delta^{(4)} = 1{,}938143;$$

le premier et le dernier de ces nombres résultent de pesées faites dans l'eau. Pour une température l' du pendule, on peut, sans erreur sensible, attribuer aux densités des quatre parties qui le composent la même variation qu'à $\delta^{(4)}$, c'est-à-dire qu'on peut les diviser toutes par $(1 + l'.0{,}000018782)^3$.

La densité de l'air, pour une hauteur barométrique β et une température τ du mercure et de l'échelle, est, d'après ce que j'ai dit à l'art. 15 de mon premier Mémoire,

$$\Delta = \frac{\beta}{337{,}006.770{,}488(1 + \tau.0{,}0001614)(1 + l'.0{,}00375)}.$$

Avec ces données, on obtient, pour les pendules observés avant le 1er juillet,

Pendule long : $\dfrac{m's'}{ms} = \dfrac{2050{,}34\,\Delta'}{3980{,}8 + m_1}$, $\quad \dfrac{m'}{m} = \dfrac{2084{,}02\,\Delta'}{4242{,}27 + m_1}$;

Pendule court : $\dfrac{m's'}{ms} = \dfrac{2049{,}82\,\Delta'}{3977{,}2 + m_1}$, $\quad \dfrac{m'}{m} = \dfrac{2083{,}04\,\Delta'}{4234{,}82 + m_1}$;

et, après le changement des fils, opéré le 1er juillet,

Pendule long : $\dfrac{m's'}{ms} = \dfrac{2050{,}00\,\Delta'}{3978{,}35 + m_1}$, $\quad \dfrac{m'}{m} = \dfrac{2083{,}35\,\Delta'}{4237{,}18 + m_1}$;

Pendule court : $\dfrac{m's'}{ms} = \dfrac{2049{,}35\,\Delta'}{3973{,}2 + m_1}$, $\quad \dfrac{m'}{m} = \dfrac{2082{,}82\,\Delta'}{4233{,}19 + m_1}$;

Δ' remplace ici $\Delta(1 + l.0{,}000018782)^2$. Si l'on remplace de même par β' la quantité

$$\frac{\beta(1 - l.0{,}0000564)}{(1 - \tau.0{,}000161)(1 + l.0{,}00057)},$$

les formules précédentes peuvent s'écrire, pour les pendules dans leur premier état,

$$\text{Pendule long : } \frac{m's'}{ms} = \frac{\alpha\beta'}{3980{,}8 - m_1}, \quad \frac{m'}{m} = \frac{\alpha'\beta'}{4242{,}27 - m_1} \left\{ \begin{array}{l} \log\alpha = 7{,}89742. \\ \log\alpha' = 7{,}90450 : \end{array} \right.$$

$$\text{Pendule court : } \frac{m's'}{ms} = \frac{\alpha\beta'}{3977{,}2 - m_1}, \quad \frac{m'}{m} = \frac{\alpha'\beta'}{4234{,}82 - m_1} \left\{ \begin{array}{l} \log\alpha = 7{,}89731. \\ \log\alpha' = 7{,}90429 : \end{array} \right.$$

et, après le changement des fils,

$$\text{Pendule long : } \frac{m's'}{ms} = \frac{\alpha\beta'}{3978{,}35 - m_1}, \quad \frac{m'}{m} = \frac{\alpha'\beta'}{4237{,}18 - m_1} \left\{ \begin{array}{l} \log\alpha = 7{,}89735. \\ \log\alpha' = 7{,}90436 : \end{array} \right.$$

$$\text{Pendule court : } \frac{m's'}{ms} = \frac{\alpha\beta'}{3973{,}2 - m_1}, \quad \frac{m'}{m} = \frac{\alpha'\beta'}{4233{,}19 - m_1} \left\{ \begin{array}{l} \log\alpha = 7{,}89721. \\ \log\alpha' = 7{,}90425. \end{array} \right.$$

7. La marche que j'ai suivie dans l'exécution des expériences actuelles est entièrement semblable à celle que j'ai décrite dans mon précédent Mémoire; je puis donc me dispenser d'aucune explication à ce sujet. Le nombre des oscillations que j'ai pu observer pour les différentes matières dépend de la rapidité du décroissement de l'amplitude, qui est moindre pour les masses lourdes enfermées dans la cavité du cylindre, plus grande pour les masses légères. Dans le cas des plus lourdes, le laiton n° 1, le fer, le zinc, le plomb, l'or, l'argent et le fer météorique, on pouvait observer 3500 oscillations avant que l'arc décrit fût assez petit pour que les observations devinssent incertaines. Pour la pierre météorique, il a fallu clore les observations après 3000 oscillations; mais, afin d'obtenir la même précision, on a repris deux fois l'expérience. Pour le laiton n° 2 et le marbre, on a dû interrompre après 2500 oscillations, mais l'expérience a été également répétée. Pour le laiton n° 3, l'argile et le quartz, on a bien observé 4000 oscillations, mais il a fallu remettre le pendule en mouvement après qu'il en eut fait la moitié. Pour l'eau, on a observé, dans chaque expérience, deux fois 1500 oscillations, et chacune a été, en outre, reprise deux fois. Les oscillations du cylindre vide au long pendule perdaient si rapidement l'étendue néces-

saire qu'il me fallut renoncer à les observer et me borner à faire osciller ce corps avec le pendule court. Les oscillations de ce dernier peuvent, en effet, toujours être observées avec une exactitude suffisante, même quand leur amplitude décroît rapidement.

L'influence qu'exerce l'élasticité du fil sur la mesure de la longueur du pendule, d'après l'art. 9 du précédent Mémoire, a été trouvée, pour les gros fils employés jusqu'au 29 juin, exactement la même que dans mes expériences antérieures, savoir

$$0^l,0042 \quad \text{et} \quad 0^l,0014,$$

pour les deux pendules; pour les fils plus fins, en usage depuis le 1er juillet, on a trouvé

$$0^l,0069 \quad \text{et} \quad 0^l,0023.$$

Ces valeurs sont déduites d'observations de l'allongement que prennent les pendules, lorsque le poids qui les tend augmente d'une once environ. Il m'a été impossible de constater que cet allongement dépendît du degré de tension que possédaient les fils avant l'addition du poids d'une once.

Les Tableaux des expériences que je donne ci-après ne contiennent pas les observations mêmes des coïncidences ni les états des horloges qu'on a employées pour les calculer, mais seulement les durées d'oscillation qui s'en déduisent, réduites au temps moyen et à l'arc infiniment petit. Le degré d'exactitude que garantit le procédé d'observation est bien connu par les expériences antérieures; je crois donc pouvoir économiser la place qu'exigerait une exposition de tous les détails de mes nombreuses expériences.

Première détermination. — Fer.

	Long pendule.	Pendule court.	Pendule court.	Long pendule.
Position du cylindre.	1re.	1re.	2e.	2e.
Temps sidéral de l'observation...	Avril 27. $22^h 54^m$	Avril 28. $5^h 23^m$	Avril 28. $23^h 39^m$	Avril 29. $4^h 59^m$
Hauteur barométrique	342^l, 19.9″,6	342^l,64.11″,3	342^l,70.10″,0	342^l,15.11″,7
Température de l'appareil....... c'...	$9°,565$	$10°,20$	$9°,61$	$10°,275$
c''...	10,00	10,545	10,005	10,57
c'''..	10,49	10,885	10,44	10,93
Température de l'air... l'...	9,385	10,11	9,565	10,235
l''...	10,515	10,625	10,01	11,025
Nombre d'oscillations	3700	6859	7080	3696
Durée d'oscillation.	1^s,7200431	0^s,9992621	0^s,9992186	1^s,7200446
Vis du levier de contact	9^t,544	9^t,482	9^t,506	9^t,569
Longueur de la toise.	863^l,9391			863^l,9441
Constante F.	440,6482	440^l,6482	440^l,6482	440,6482
Correction de température	+ 0,0526	+ 0,0559	+ 0,0528	+ 0,0562
Élasticité du fil	+ 0,0042	+ 0,0014	+ 0,0014	+ 0,0042
Différence mesurée.	− 0,8609	− 0,8553	− 0,8574	− 0,8631
Longueur mesurée.	1303,7832	439,8502	439,8450	1303,7896
$440^l,81.tt$	1304,1577	440,1597	440,1214	1304,1599
Réduction au pendule composé...	+ 0,1843	− 0,1249	− 0,1249	+ 0,1843
Réduction au vide..	− 0,2973	− 0,1002	− 0,1004	− 0,2962
Longueur calculée.	1304,0447	439,9346	439,8961	1304,0480
Différence	+ 0^l,2615	− 0^l,0844	− 0^l,0511	− 0^l,2584
»	− 0^l,2952 k	− 0^l,0995 k'	− 0^l,0997 k'	− 0^l,2942 k

Moyenne... { Long pendule... $0 = + 0^l,2600 - 0^l,2947\,k + 2,9578\,\varepsilon$.
Pendule court .. $0 = + 0^l,0678 - 0^l,0996\,k' + 0,9983\,\varepsilon$.

Deuxième détermination. — Zinc.

	Long pendule.	Pendule court.	Pendule court.	Long pendule
Position du cylindre.	1re.	1re.	2e.	2e.
Temps sidéral de l'observation...	Avril 29. $23^h 53^m$	Mai 1. $23^h 47^m$	Mai 2. $5^h 8^m$	Mai 3. $3^h 13^m$
Hauteur barométrique	$338^l,20.11°,6$	$332^l,45.9°,8$	$334^l.70.10°,2$	$337^l,44.10°,0$
Température de l'appareil....... e'...	10°,345	9°,34	9°,515	9°,02
e''...	10,615	9,685	9,91	9,22
e'''...	10,935	10,04	10,215	9,45
Température de l'air ... t'...	10,32	9,23	9,40	8,995
t''...	11,025	9,65	9,76	9,57
Nombre d'oscillations	3769	6796	7190	3692
Durée d'oscillation.	$1^s,7200747$	$0^s,9992817$	$0^s,9991885$	$1^s,7200033$
Vis du levier de contact........	$9^t,513$	$9^t,509$	$9^t,521$	$9^t,493$
Longueur de la toise.	$863^l,9143$			$863^l,9297$
Constante F.......	440,6493	$440^l,6493$	$440^l,6493$	440,6493
Correction de température.......	+ 0,0565	+ 0,0512	+ 0,0522	+ 0,0492
Élasticité du fil....	+ 0,0042	+ 0,0014	+ 0,0014	+ 0,0042
Différence mesurée.	— 0,8581	— 0,8577	— 0,8588	— 0,8561
Longueur mesurée.	1303,7962	439,8442	439,8441	1303,7763
$440^l,81.u$	1304,2056	440,1778	440,0949	1304,0973
Réduction au pendule composé...	— 0,1829	— 0,1292	— 0,1292	+ 0,1829
Réduction au vide..	— 0,2928	— 0,0975	— 0,0981	— 0,2935
Longueur calculée..	1304,0957	439,9511	439,8676	1303,9867
Différence	+ $0^l,2995$	— $0^l,1069$	+ $0^l,0235$	+ $0^l,2104$
»	— $0^l,2907 k$	— $0^l,0969 k'$	— $0^l,0975 k'$	— $0^l,2915 k$

Moyenne... { Long pendule... $0 = -0^l,2550 - 0^l,2911\,k + 2,9578\,\varepsilon$.
Pendule court. . $0 = +0^l,0652 - 0^l,0972\,k' + 0,9982\,\varepsilon$.

Troisième détermination. Plomb.

	Long pendule.	Pendule court.	Pendule court.	Long pendule.
Position du cylindre.	1re.	1re.	2e.	2e.
Temps sidéral de l'observation...	Mai 3. $23^h 43^m$	Mai 4. $6^h 46^m$	Mai 5. $4^h 40^m$	Mai 6. $6^h 2^m$
Hauteur barométrique..........	$337^l,64.9°,3$	$337^l,09.10°,2$	$335^l,92.9°,8$	$336^l,35.12°,3$
Température de l'appareil e'..	8°,92	9°,515	8°,53	10°,00
e''...	9,215	9,785	8,73	10,37
e'''..	9,475	10,09	9,15	10,935
Température de l'air... t'...	8,83	9,495	8,485	10,15
t''...	9,535	9,80	8,86	11,41
Nombre d'oscillations..........	3682	6868	7246	3645
Durée d'oscillation.	$1^s,7200581$	$0^s,9992684$	$0^s,9991788$	$1^s,7200133$
Pas du levier de contact........	$9^t,458$	$9^t,469$	$9^t,457$	$9^t,528$
Longueur de la toise.	$863^l,9298$			$863^l,9433$
Constante F.......	440,6501	$440^l,6501$	$440^l,6501$	440,6501
Correction de température.......	+ 0,0488	+ 0,0520	+ 0,0465	+ 0,0548
Élasticité du fil....	— 0,0042	+ 0,0014	+ 0,0014	+ 0,0042
Différence mesurée.	— 0,8531	— 0,8541	— 0,8530	— 0,8594
Longueur mesurée.	1303,7798	439,8494	439,8450	1303,7930
$40^l,81.tt$.........	1304,1804	440,1652	440,0863	1304,1125
Réduction au pendule composé..	+ 0,1887	— 0,1130	— 0,1130	+ 0,1887
Réduction au vide..	— 0,2939	— 0,0988	— 0,0988	— 0,2912
Longueur calculée..	1304,0752	439,9534	439,8745	1304,0100
Différence.........	$+ 0^l,2954$	$+ 0^l,1040$	$+ 0^l,0295$	$+ 0^l,2170$
»	$— 0^l,2919k$	$— 0^l,0981k'$	$— 0^l,0981k'$	$— 0^l,2893k$

Moyenne... { Long pendule... $o = + 0^l,2562 - 0^l,2906k - 2,9578\,\varepsilon$.
{ Pendule court... $o = + 0^l,0668 - 0^l,0981k - 0,9982\,\varepsilon$.

Quatrième détermination. — Argent.

	Long pendule.	Pendule court.	Pendule court.	Long pendule.
Position du cylindre.	1re.	1re.	2e.	2e.
Temps sidéral de l'observation. .	Mai 6. $2^h\ 43^m$	Mai 7. $6^h\ 48^m$	Mai 8. $5^h\ 37^m$	Mai 9. $5^h\ 43^m$
Hauteur barométrique	$335^l,77.12°,3$	$335^l,16.13°,1$	$336^l,05.14°,4$	$335^l,06.14°,7$
Température de l'appareil . . . . e'. . .	$11°,31$	$11°,55$	$11°,93$	$12°,43$
e''. . .	11,585	11,875	12,40	12,84
e'''. .	12,00	12,29	13,01	13,34
Température de l'air . . . . l'. . .	11,205	11,54	12,035	12,47
l''. . .	12,09	12,005	12,655	13,725
Nombre d'oscillations	3644	7632	6316	3716
Durée d'oscillation.	$1^s,7199473$	$0^s,9990927$	$0^s,9994187$	$1^s,7201608$
Vis du levier de contact	$9^t,538$	$9^t,589$	$9^t,557$	$9^t,479$
Longueur de la toise.	$863^l,9545$			$863^l,9679$
Constante F.	440,6510	$440^l,6510$	$440^l,6510$	440,6510
Correction de température.	+ 0,0617	+ 0,0631	+ 0,0654	+ 0,0681
Elasticité du fil	+ 0,0042	+ 0,0014	— 0,0014	+ 0,0042
Différence mesurée.	— 0,8603	— 0,8649	— 0,8620	— 0,8550
Longueur mesurée.	1303,8111	439,8506	439,8558	1303,8362
$440^l,81.tt$	1304,0124	440,0105	440,2977	1304,3362
Réduction au pendule composé. .	+ 0,1806	— 0,1359	— 0,1359	+ 0,1806
Réduction au vide. .	— 0,2894	— 0,0974	— 0,0975	— 0,2875
Longueur calculée. .	1303,9036	439,7772	440,0643	1304,2293
Différence	$+ 0^l,0925$	$+ 0^l,0734$	$+ 0^l,2085$	$+ 0^l,3931$
»	$- 0^l,2875\,k$	$- 0^l,0968\,k'$	$- 0^l,0968\,k'$	$- 0^l,2855\,k$

Moyenne. . . Long pendule. . . $o = + 0^l,2428 - 0^l,2865\,k + 2,9579\,\varepsilon.$

Pendule court. . . $o = - 0^l,0676 - 0^l,0968\,k' + 0,9983\,\varepsilon.$

Cinquième détermination. — Or.

	Long pendule.	Pendule court.	Pendule court	Long pendule
Position du cylindre.	1re.	1re.	2e.	2e.
Temps sidéral de l'observation...	Mai 9. 1h 45m	Mai 10. 7h 6m	Mai 10. 0h 29m	Mai 11. 7h 16
Hauteur barométrique	337l,09. 12°,0	338l,57. 12°,4	338l,77. 11°,7	338l,12. 13°,0
Température de l'appareil....... e'...	11°,745	11°,955	11°,085	11°,84
e''...	12,165	12,38	11,395	12,17
e'''...	12,455	12,62	11,665	12,43
Température de l'air... t'...	11,645	11,855	11,01	11,77
t''...	12,60	12,325	11,375	12,555
Nombre d'oscillations	3660	6991	6810	3664
Durée d'oscillation.	1s,7200486	0s,9992304	0s,9992807	1s,7200656
Vis du levier de contact	9t,541	9t,495	9t,483	9t,497
Longueur de la toise.	863l,9598			863l,9596
Constante F	440,6503	440l,6503	440l,6503	440,6503
Correction de température.......	+ 0,0644	+ 0,0655	+ 0,0606	+ 0,0647
Élasticité du fil	+ 0,0042	+ 0,0014	+ 0,0014	+ 0,0042
Différence mesurée.	— 0,8606	— 0,8564	— 0,8554	— 0,8566
Longueur mesurée.	1303,8181	439,8608	439,8569	1303,8222
440l,81.tt	1304,1661	440,1318	440,1761	1304,1908
Réduction au pendule composé. .	— 0,1821	— 0,1340	— 0,1340	— 0,1821
Réduction au vide..	— 0,2921	— 0,0985	— 0,0989	— 0,2915
Longueur calculée.	1304,0561	439,8993	439,9432	1304,0814
Différence	— 0l,2380	+ 0l,0385	+ 0l,0863	— 0l,2592
»	— 0l,2902 k	— 0l,0979 k'	— 0l,0982 k'	— 0l,2896 k

Moyenne.... Long pendule... $o = + 0^l,2486 - 0^l,2899\,k + 2,9579\,\varepsilon$

Pendule court... $o = - 0^l,0624 - 0^l,0981\,k + 0,9983\,\varepsilon$

Sixième détermination. — Pierre météorique.

	Long pendule.	Pendule court.	Long pendule.
Position du cylindre......	1re.	1re.	1re.
Temps sidéral de l'observation	Mai 13. $23^h 57^m$	Mai 13. $3^h 16^m$	Mai 14. $6^h 37^m$
Hauteur barométrique....	$337^l,99.10°,3$	$337^l,95.10°,5$	$337^l,70.10°,9$
Température de l'appareil .... e'.....	$9°,725$	$10°,225$	$10°,495$
e''.....	9,96	10,40	10,665
e'''.....	10,365	10,565	10,93
Température de l'air......... l'.. ..	9,675	10,15	10,46
l''.. ..	10,415	10,405	10,87
Nombre d'oscillations.....	3208	7356	3179
Durée d'oscillation..	$1^s,7198648$	$0^s,9991525$	$1^s,7198544$
Vis du levier de contact..	$13^t,505$	$10^t,877$	$13^t,538$
Longueur de la toise.....	$863^l,9382$		$863^l,9444$
Constante F.............	440,6508	$440^l,6508$	440,6508
Correction de température.	+ 0,0531	+ 0,0557	+ 0,0572
Élasticité du fil	+ 0,0042	+ 0,0014	+ 0,0042
Différence mesurée.	— 1,2176	— 0,9812	— 1,2211
Longueur mesurée	1303,4287	439,7267	1303,4355
$440^l,81.tt$...............	1303,8873	440,0631	1303,8715
Réduction au pendule composé.............	+ 0,2448	— 0,1576	+ 0,2448
Réduction au vide........	— 0,3864	— 0,1302	— 0,3850
Longueur calculée........	1303,7457	439,7753	1303,7313
Différence...............	$+ 0^l,3170$	$+ 0^l,0486$	$+ 0^l,2958$
»	$— 0^l,3810k$	$— 0^l,1284k$	$— 0^l,3796k$

Sixième détermination (suite). — Pierre météorique.

	Long pendule.	Pendule court.	Long pendule.
Position du cylindre......	2e.	2e.	2e.
Temps sidéral de l'observation...........	Mai 14. 23h56m	Mai 14. 3h26m	Mai 15. 6h21m
Hauteur barométrique....	337l,65.10°,0	337l,81.10°,3	338l,14.10°,8
Température de l'appareil.... e'.....	9°,73	10°,03	10°,27
e''.....	9,955	10,225	10,42
e'''.....	10,29	10,44	10,565
Température de l'air......... l'.....	9,705	9,94	10,16
l''.....	10,29	10,185	10,59
Nombre d'oscillations.....	3205	6972	3194
Durée d'oscillation.......	1s,7199023	0s,9992391	1s,7198975
Vis du levier de contact..	13t,535	10t,928	13t,545
Longueur de la toise.....	863l,9377		863l,9413
Constante F.............	440,6508	440l,6508	440,6508
Correction de température.	− 0,0531	− 0,0547	− 0,0559
Élasticité du fil..........	+ 0,0042	+ 0,0014	+ 0,0042
Différence mesurée.......	− 1,2209	− 0,9857	− 1,2218
Longueur mesurée.......	1303,4249	439,7212	1303,4304
440l,81.tt...............	1303,9431	440,1394	1303,9369
Réduction au pendule composé........	+ 0,2448	− 0,1576	+ 0,2448
Réduction au vide........	− 0,3860	− 0,1303	− 0,3859
Longueur calculée	1303,8019	439,8515	1303,7958
Différence.....	+ 0l,3770	+ 0l,1303	+ 0l,3654
»	− 0l,3806k	− 0l,1285k'	− 0l,3805k

Moyenne. { Long pendule. $o = + 0^l,3388 - 0^l,3804k + 2,9571\varepsilon$.
Pendule court. $o = + 0^l,0894 - 0^l,1284k' + 0,9981\varepsilon$.

Septième détermination. — Laiton II.

	Long pendule.	Long pendule.	Pendule court.
Position du cylindre......	1re.	1re.	1re.
Temps sidéral de l'observation..........	Mai 19. 8h 25m	Mai 20. 8h 5m	Mai 20. 0h 37m
Hauteur barométrique....	334l,76. 9°,7	335l,87. 10°,5	336l,20. 9°,1
Température de l'appareil .... e'.....	8°,95	9°,115	8°,87
e''.....	9,00	9,295	9,05
e'''.....	9,15	9,50	9,325
Température de l'air......... t'.....	8,875	9,18	8,845
t''.....	9,22	9,72	8,965
Nombre d'oscillations	2628	2668	6006
Durée d'oscillation.......	1s,7198574	1s,7198695	0s,9991898
Vis du levier de contact ..	14t,838	14t,830	11t,374
Longueur de la toise.....	863l,9270	863l,9303	
Constante F.............	440,6531	440,6531	440l,6531
Correction de température.	+ 0,0483	+ 0,0497	+ 0,0483
Élasticité du fil..........	+ 0,0042	+ 0,0042	+ 0,0014
Différence mesurée.......	— 1,3384	— 1,3377	— 1,0259
Longueur mesurée.......	1303,2942	1303,2996	439,6769
440l,81.tt.........	1303,8761	1303,8944	440,0960
Réduction au pendule composé.............	+ 0,2879	+ 0,2879	— 0,1209
Réduction au vide...... .	— 0,4232	— 0,4241	— 0,1435
Longueur calculée.......	1303,7408	1303,7582	439,8316
Différence............ ..	+ 0l,4466	+ 0l,4586	+ 0l,1547
»	— 0l,4161 k	— 0l,4169 k	— 0l,1411 k'

Septième détermination (suite). — Laiton II.

	Pendule court.	Long pendule.	Long pendule.
Position du cylindre......	2e.	2e.	2e.
Temps sidéral de l'observation............	Mai 20. 3h 38m	Mai 21. 7h 17m	Mai 22. 6h [illegible]
Hauteur barométrique....	336l, 10.10",2	336l, 14.11",5	335l, 50.15",9
Température de l'appareil .... e'.....	9°,215	9°,565	10°,10
e''.....	9,385	9,785	10,345
e'''.....	9,695	10	10,835
Température de l'air......... l'.....	9,235	9,65	10,175
l''.....	9,415	10,34	11,055
Nombre d'oscillations.....	6456	2660	2649
Durée d'oscillation.......	0s,9990769	1s,7198005	1s,7198034
Vis du levier de contact ..	11t,359	14t,804	14t,784
Longueur de la toise		863l,9364	863l,9424
Constante F........	440l,6531	440,6531	440,6531
Correction de température.	+ 0,0502	+ 0,0522	+ 0,0552
Élasticité du fil	+ 0,0014	+ 0,0042	+ 0,0042
Différence mesurée..... .	— 1,0246	— 1,3353	— 1,3335
Longueur mesurée.......	439,6801	1303,3106	1303,3214
440l,81.u...............	439,9965	1303,7898	1303,7942
Réduction au pendule composé.............	— 0,1209	— 0,2879	— 0,2879
Réduction au vide	+ 0,1432	+ 0,4237	+ 0,4235
Longueur calculée........	439,7324	1303,6540	1303,6586
Différence.........	+ 0l,0523	+ 0l,3434	+ 0l,3372
»	— 0l,1409k'	— 0l,4165k	— 0l,4163k

Moyenne. { Long pendule. $o = -0^l,3965 - 0^l,4165k + 0,9568\varepsilon$.
{ Pendule court. $o = +0^l,1035 - 0^l,1410k + 0,99802\varepsilon$.

Huitième détermination. — Fer météorique.

	Long pendule.	Pendule court.	Pendule court.	Long pendule.
Position du cylindre.	1re.	1re.	2e.	2e.
Temps sidéral de l'observation. . .	Mai 23. 6h 8m	Mai 23. 9h 2m	Mai 23. 1h 31m	Mai 24. 6h 23m
Hauteur barométrique	334l,00. 13°,0	334l,02. 12°,9	335l,40. 12°,7	336l,03. 12°,9
Température de l'appareil . . . . . . e' . . .	11°,135	11°,41	11°,31	11°,555
e'' . . .	11,365	11,71	11,56	11,85
e''' . . .	11,955	12,165	11,975	12,24
Température de l'air . . . t' . . .	11,205	11,505	11,29	11,57
t'' . . .	12,30	11,87	11,62	12,37
Nombre d'oscillations	3642	6975	6766	3664
Durée d'oscillation.	1s,7200556	0s,9992439	0s,9992958	1s,7200871
Vis du levier de contact	9t,209	9t,455	9t,467	9t,219
Longueur de la toise.	863l,9534			863l,9572
Constante F	440,6512	440l,6512	440l,6512	440,6512
Correction de température	+ 0,0607	− 0,0624	− 0,0617	+ 0,0631
Élasticité du fil	+ 0,0042	+ 0,0014	+ 0,0014	+ 0,0042
Différence mesurée.	− 0,8306	− 0,8528	− 0,8539	− 0,8315
Longueur mesurée.	1303,8389	439,8622	439,8604	1303,8442
440l.81.tt.	1304,1766	440,1437	440,1894	1304,2244
Réduction au pendule composé . .	+ 0,1726	− 0,1450	− 0,1450	+ 0,1726
Réduction au vide. .	− 0,2817	− 0,0950	− 0,0955	− 0,2831
Longueur calculée.	1304,0675	439,9037	439,9489	1304,1139
Différence	+ 0l,2286	− 0l,0415	+ 0l,0885	+ 0l,2697
»	− 0l,2800 k	− 0l,0944 k'	− 0l,0949 k'	− 0l,2813 k

Moyenne . . . . Long pendule . . . $o = + 0^l,2491 - 0^l,2807\,k - 2,9580\,\varepsilon$.

Moyenne . . . . Pendule court . . . $o = + 0^l,0650 - 0^l,0947\,k' + 0,9983\,\varepsilon$.

Neuvième détermination. Marbre.

	Long pendule.	Long pendule.	Pendule court.
Position du cylindre......	1re.	1re.	1re.
Temps sidéral de l'observation............	Mai 27. $2^h 55^m$	Mai 28. $6^h 40^m$	Mai 28. $9^h 44^m$
Hauteur barométrique.. .	$336^l,60.17^{\circ},3$	$336^l,10.18^{\circ},3$	$336^l,50.18^{\circ},1$
Température de l'appareil .... e'.....	$15^{\circ},345$	$16^{\circ},015$	$16^{\circ},26$
e''.....	15,835	16,565	16,93
e'''.....	16,53	17,25	17,60
Température de l'air......... t'.....	15,42	16,065	16,45
t''.....	16,955	17,745	17,155
Nombre d'oscillations.. .	2650	2636	5827
Durée d'oscillation.......	$1^s,7198687$	$1^s,7199054$	$0^s,9992316$
Vis du levier de contact..	$14^t,174$	$14^t,152$	$11^t,075$
Longueur de la toise. ...	$863^l,9989$	$864^l,0065$	
Constante F.............	440,6506	440,6506	$440^l,6506$
Correction de température.	+ 0,0838	+ 0,0877	+ 0,0892
Élasticité du fil..........	+ 0,0042	— 0,0042	— 0,0014
Différence mesurée.	— 1,2785	— 1,2765	— 0,9991
Longueur mesurée.... ..	1303,4590	1303,4725	439,7421
$440^l,81.tt$..............	1303,8932	1303,9489	440,1328
Réduction au pendule composé............	+ 0,2614	+ 0,2614	0,1636
Réduction au vide.......	— 0,3995	— 0,3980	0,1349
Longueur calculée..	1303,7551	1303,8123	439,8343
Différence	— $0^l,2961$	+ $0^l,3398$	— $0^l,0922$
»	— $0^l,3933A$	— $0^l,3917A$	— $0^l,1325A$

Neuvième détermination (suite). — Marbre.

	Pendule court.	Long pendule.	Long pendule.
Position du cylindre....	2e.	2e.	2e.
Temps sidéral de l'observation............	Mai 29. 6^h 42^m	Mai 29. 9^h 19^m	Mai 29. 2^h 10^m
Hauteur barométrique....	337^l,25.18°,8	337^l,31.18°,9	337^l,38.18°,0
Température de l'appareil.... e'....	16°,595	16°,96	16°,305
e''....	17,24	17,51	16,975
e'''....	17,965	18,165	17,72
Température de l'air......... t'.....	16,63	17,05	16,34
t''.....	17,515	18,53	17,97
Nombre d'oscillations....	6995	2642	2676
Durée d'oscillation.......	0^s,9992254	1^s,7199090	1^s,7199244
Vis du levier de contact..	11^t,040	14^t,224	14^t,188
Longueur de la toise.....		864^l,0158	864^l,0109
Constante F.............	440^l,6506	440,6506	440,6506
Correction de température.	+ 0,0910	+ 0,0928	+ 0,0895
Élasticité du fil..........	+ 0,0014	+ 0,0042	+ 0,0042
Différence mesurée......	— 0,9958	— 1,2830	— 1,2798
Longueur mesurée......	439,7472	1303,4804	1303,4754
$440^l,81.tt$..............	440,1274	1303,9543	1303,9777
Réduction au pendule composé.............	— 0,1636	— 0,2614	+ 0,2614
Réduction au vide.......	— 0,1345	— 0,3980	— 0,3992
Longueur calculée.......	439,8293	1303,8177	1303,8399
Différence...............	— 0^l,0821	— 0^l,3373	+ 0^l,3645
»	— 0^l,1325k'	— 0^l,3918k	— 0^l,3930k

Moyenne. { Long pendule. $0 = - 0^l,3344 - 0^l,3925k - 2,9571\varepsilon$.
{ Pendule court. $0 = + 0^l,0873 - 0^l,1324k' + 0,9981\varepsilon$.

Dixième détermination. — Argile.

	Long pendule.	Pendule court.	Pendule court.	Long pendule.
Position du cylindre.	1re.	1re.	2e.	2e.
Temps sidéral de l'observation...	Mai 30. 7h 40m	Mai 30. 1h 59m	Mai 30. 4h 0m	Mai 31. 3h [illegible]
Hauteur barométrique.........	337l,29.19°,0	336l,96.19°,0	336l,77.19°,8	337l,7[illegible].18°,9
Température de l'appareil....... e'...	17°,105	17°,30	17°,69	17°,30
e''..	17,655	18,045	18,31	18,0[illegible]
e'''.	18.34	18,66	18,98	18,73
Température de l'air... t'...	17,165	17,37	17,73	17,33
t''..	18,675	18,205	18,59	18,93
Nombre d'oscillations..........	2135-2146	4650	4705	2157-2128
Durée d'oscillation.	1s.7198429	0s,9992323	0s,9992122	1s.7198701
Vis du levier de contact........	16t,108	11t,630	11t,636	16t.161
Longueur de la toise.	864l,0174			864l.0213
Constante F......	440,6469	440l,6469	440l,6469	440,6469
Correction de température.......	+ 0,0936	— 0,0951	+ 0,0970	+ 0,0950
Élasticité du fil....	+ 0,0042	+ 0,0014	+ 0,0014	+ 0,0042
Différence mesurée.	— 1,4529	— 1,0490	— 1,0496	— 1,4577
Longueur mesurée.	1303,3092	439,6944	439,6957	1303,3097
440l81.tt.........	1303,8541	440,1334	440,1157	1303,8953
Réduction au pendule composé..	— 0,3225	— 0,1638	— 0,1638	— 0,3225
Réduction au vide..	+ 0,4719	— 0,1601	— 0,1598	— 0,4750
Longueur calculée..	1303,7017	439.8095	439.7921	1303.7428
Différence.........	— 0l,3925	0l,1151	— 0l,0964	— 0l,4331
»	— 0l.4647k	— 0l,1567k'	— 0l,1564k'	— 0l,4649k

Moyenne... { Long pendule... 0 — 0l,4128 — 0l,4648k — 0,9568ε.
Moyenne... { Pendule court... 0 — 0l,1058 — 0l,1566k' — 0,9981ε

Onzième détermination. — Eau.

	Long pendule.	Long pendule.	Pendule court.
Position du cylindre	1re.	1re.	1re.
Temps sidéral de l'observation............	Juin 1er. $9^h 11^m$	Juin 2. $8^h 10^m$	Juin 2. $10^h 26^m$
Hauteur barométrique....	$337^l,45.19°,8$	$338^l,78.19°,2$	$339^l,00.19°,3$
Température de l'appareil.... e'	$18°,075$	$17°,685$	$17°,835$
e''	18,775	18,26	18,43
e'''	19,795	18,755	18,905
Température de l'air......... l'	18,18	17,68	17,82
l''	19,885	18,87	18,575
Nombre d'oscillations	1642-1689	1653-1635	4738
Durée d'oscillation.......	$1^s,7198116$	$1^s,7198600$	$0^s,9991973$
Vis du levier de contact ..	$18^t,142$	$17^t,960$	$12^t,375$
Longueur de la toise.....	$864^l,0308$	$864^l,0224$	
Constante F............	440,6466	440,6367	$440^l,6367$
Correction de température.	+ 0,0992	+ 0,0968	+ 0,0979
Élasticité du fil........	+ 0,0042	+ 0,0042	+ 0,0014
Différence mesurée......	— 1,6364	— 1,6200	— 1,1162
Longueur mesurée.......	1303,1444	1303,1401	439,6198
$440^l,81.tt$	1303,8066	1303,8800	440,1026
Réduction au pendule composé............	— 0,4113	— 0,4113	— 0,1651
Réduction au vide.......	— 0,5855	— 0,5890	— 0,1988
Longueur calculée.......	1303,6324	1303,7023	439,7387
Différence.............	— $0^l,4880$	— $0^l,5622$	— $0^l,1189$
»	— $0^l,5678\,k$	— $0^l,5711\,k$	— $0^l,1929\,k'$

Onzième détermination (suite). Eau.

	Pendule court.	Long pendule.	Long pendule.
Position du cylindre	2e.	2e.	2e.
Temps sidéral de l'observation............	Juin 3. $8^h 6^m$	Juin 3. $10^h 14^m$	Juin 3. $2^h 43^m$
Hauteur barométrique....	337',75. 19°,0	337',83. 19°,2	338',00. 18°,6
Température de l'appareil .... e'.....	17°,615	17°,91	17°,275
e''.....	18,285	18,505	17,85
e'''.....	19,18	19,105	18,34
Température de l'air......... t'.....	17,575	17,845	17,175
t''.....	18,465	19,295	18,56
Nombre d'oscillations	4761	1660-1631	1642-1631
Durée d'oscillation	0s,9991928	1s,7198089	1s,7198301
Vis du levier de contact ..	12t,390	18t,355	18t,339
Longueur de la toise.....		864',0258	864',0183
Constante F.............	440',6367	440,6367	440,6367
Correction de température.	+ 0,0966	+ 0,0981	+ 0,0946
Élasticité du fil..........	+ 0,0014	+ 0,0042	+ 0,0042
Différence mesurée	— 1,1176	— 1,6556	— 1,6542
Longueur mesurée.......	439,6171	1303,1092	1303,0996
440',81.u...............	439,0987	1303,8025	1303,8347
Réduction au pendule composé..............	— 0,1651	— 0,4113	— 0,4113
Réduction au vide	— 0,1982	— 0,5867	— 0,5889
Longueur calculée	439,7354	1303,6271	1303,6571
Différence...............	— 0',1183	— 0',5179	— 0',5575
»	— 0',1924 k'	— 0',5693 k	— 0',5713 k

Moyenne. { Long pendule. 0 = + 0',5314 — 0',5699 k — 2,9565 ε.
Pendule court. 0 = — 0',1186 — 0',1927 k' — 0,9979 ε.

Douzième détermination. — Laiton I.

	Long pendule.	Pendule court.	Pendule court.	Long pendule.
Position du cylindre.	1re.	1re.	2e.	2e.
Temps sidéral de l'observation...	Juin 5. 10^h20^m	Juin 6. 7^h47^m	Juin 6. 10^h20^m	Juin 6. 2^h52^m
Hauteur barométrique.........	$334^l,40.20°,0$	$336^l,20.19°,6$	$336^l,10.20°,0$	$336^l,14.19°,0$
Température de l'appareil....... e'...	$18°,365$	$17°,98$	$18°,25$	$17°,785$
e''..	18,845	18,53	18,75	18,31
e'''..	19,285	18,98	19,155	18,73
Température de l'air... l'...	18,33	17,955	18,245	17,675
l''..	19,675	18,70	18,895	18,84
Nombre d'oscillations..........	3665	6554	7143	3704
Durée d'oscillation.	$1^s,7201367$	$0^s,9993402$	$0^s,9991918$	$1^s,7200746$
Vis du levier de contact........	$9^t,343$	$9^t,411$	$9^t,429$	$9^t,387$
Longueur de la toise.	$864^l,0279$			$864^l,0225$
Constante F........	440,6359	$440^l,6359$	$440^l,6359$	440,6359
Correction de température.......	+ 0,1003	+ 0,0984	— 0,0998	+ 0,0973
Élasticité du fil....	— 0,0042	+ 0,0014	+ 0,0014	+ 0,0042
Différence mesurée.	— 0,8427	— 0,8489	— 0,8505	— 0,8464
Longueur mesurée.	1303,9256	439,8868	439,8866	1303,9135
$440^l,81.tt$.........	1304,2995	440,2285	440,0978	1304,2054
Réduction au pendule composé..	+ 0,1853	— 0,1222	— 0,1222	+ 0,1853
Réduction au vide..	— 0,2811	— 0,0955	— 0,0953	— 0,2832
Longueur calculée..	1304,2037	440,0108	439,8803	1304,1075
Différence.........	+ $0^l,2781$	+ $0^l,1240$	+ $0^l,0063$	+ $0^l,1940$
»	— $0^l,2791\,k$	— $0^l,0949\,k'$	— $0^l,0947\,k'$	— $0^l,2813\,k$

Moyenne... { Long pendule... $o = +0^l,2361 - 0^l,2802\,k + 2,9581\,\varepsilon$.
{ Pendule court... $o = +0^l,0589 - 0^l,0948\,k' + 0,9983\,\varepsilon$.

Treizième détermination. — Laiton III.

	Long pendule.	Pendule court.	Pendule court.	Long pendule.
Position du cylindre.	1re.	1re.	2e.	2e.
Temps sidéral de l'observation...	Juin 7. 8h24m	Juin 7. 2h44m	Juin 8. 8h14m	Juin 9. 9h9m
Hauteur barométrique..........	336l,06. 19°,6	336l,30. 17°,9	336l,64. 18°,0	338l,41. 17°,0
Température de l'appareil....... e'...	18°,25	17°,13	17°,255	16°,60
e''..	18,70	17,63	17,75	17,145
e'''..	19,18	18,14	18,24	17,62
Température de l'air... l'...	18,205	17,065	17,175	16,505
l''...	19,18	17,665	17,775	17,675
Nombre d'oscillations..........	2146-2128	4567	5019	2138-2178
Durée d'oscillation.	1s,7198699	0s,9992620	0s,9991045	1s,7197638
Vis du levier de contact........	17t,632	12t,164	12t,169	17t,697
Longueur de la toise.	864l,0267			864l,0110
Constante F.......	440,6378	440l,6378	440l,6378	440,6378
Correction de température.......	+ 0,0997	+ 0,0937	+ 0,0946	+ 0,0909
Élasticité au fil....	+ 0,0042	+ 0,0014	+ 0,0014	+ 0,0042
Différence mesurée.	− 1,5904	− 1,0972	− 1,0976	− 1,5963
Longueur mesurée.	1303,1780	439,6357	439,6362	1303,1476
$440^{l}81.u$..........	1303,8950	440,1596	440,0209	1303,7342
Réduction au pendule composé. .	+ 0,3899	− 0,1338	− 0,1338	+ 0,3899
Réduction au vide .	− 0,5434	− 0,1844	− 0,1845	− 0,5506
Longueur calculée..	1303,7415	439,8414	439,7026	1303,5735
Différence.........	+ 0l,5635	+ 0l,2059	+ 0l,0664	+ 0l,4259
»	− 0l,5286 k	− 0l,1795 k'	− 0l,1796 k'	− 0l,5356 k

Moyenne... { Long pendule... $0 = + 0^{l},4947 - 0^{l},5321\,k + 0,9565\,z$.
{ Pendule court... $0 = + 0^{l},1362 - 0^{l},1796\,k' - 0,9980\,z$.

Quatorzième détermination. — Quartz.

	Long pendule.	Pendule court.	Pendule court.	Long pendule.
Position du cylindre.	1re.	1re.	2e.	2e.
Temps sidéral de l'observation...	Juin 10. $8^h 39^m$	Juin 10. $11^h 10^m$	Juin 10. $2^h 38^m$	Juin 10. $5^h 12^m$
Hauteur barométrique	$338^l,43.16°,0$	$338^l,27.15°,8$	$336^l,44.14°,9$	$336^l,80.15°,1$
Température de l'appareil....... e'...	15°,54	15°,56	14°,725	14°,96
e''...	15,88	15,755	15,13	15,21
e'''..	16,335	16,36	15,42	15,495
Température de l'air ... l'...	15,465	15,49	14,63	14,81
l''...	16,42	15,98	15,015	15,69
Nombre d'oscillations	2103-2114	5308	5318	2134-2134
Durée d'oscillation.	$1^s,7199294$	$0^s,9993931$	$0^s,9990196$	$1^s,7197098$
Vis du levier de contact........	$16^t,910$	$11^t,826$	$11^t,869$	$16^t,919$
Longueur de la toise.	$863^l,9974$			$863^l,9903$
Constante F.......	440,6375	$440^l,6375$	$440^l,6375$	440,6375
Correction de température.......	+ 0,0848	+ 0,0851	+ 0,0805	+ 0,0814
Élasticité du fil....	+ 0,0042	+ 0,0014	+ 0,0014	+ 0,0042
Différence mesurée.	— 1,5253	— 1,0667	— 1,0707	— 1,5261
Longueur mesurée.	1303,1986	439,6573	439,6487	1303,1873
$440^l,81.u$	1303,9853	440,2751	439,9462	1303,6523
Réduction au pendule composé...	+ 0,3499	— 0,1644	— 0,1644	+ 0,3499
Réduction au vide..	— 0,5149	— 0,1738	— 0,1733	— 0,5135
Longueur calculée..	1303,8183	439,9369	439,6085	1303,4887
Différence.........	$+ 0^l,6197$	$+ 0^l,2796$	$- 0^l,0402$	$+ 0^l,3014$
»	$- 0^l,5023k$	$- 0^l,1696k'$	$- 0^l,1692k'$	$- 0^l,5005k$

Moyenne ... Long pendule... $0 = + 0^l,4606 - 0^l,5014k + 2,9565\,\varepsilon$.
Pendule court... $0 = + 0^l,1197 - 0^l,1694k' + 0,9980\,\varepsilon$.

Quinzième détermination. — Eau.

	Long pendule.	Long pendule.	Pendule court.
Position du cylindre	1re.	1re.	1re.
Temps sidéral de l'observation............	Juin 22.9h33m	Juin 22.11h43m	Juin 23.8h57m
Hauteur barométrique....	337l.68.20°,2	337l.64.19°.9	337l.00.20°.0
Température de l'appareil .... e'.....	18°,005	18°,125	18°,005
e''.....	18,505	18,655	18,555
e'''.....	19,155	19,305	19,105
Température de l'air......... t'.....	18,135	18,23	18,095
t''.....	19,59	19,69	18,725
Nombre d'oscillations	1637-1666	1713-1713	1635
Durée d'oscillation.......	1s,7195945	1s,7195997	0s,9988114
Vis du levier de contact ..	21t,976	21t,972	16t,008
Longueur de la toise	864l,0258	864l,0267	
Constante F.............	440,6393	440,6393	440l,6393
Correction de température.	+ 0,0984	+ 0,0991	+ 0,0985
Élasticité du fil	+ 0,0042	+ 0,0042	+ 0,0014
Différence mesurée.......	— 1,9822	— 1,9819	— 1,4439
Longueur mesurée	1302,7855	1302,7874	439,2953
440l.81.u	1303,4775	1303,4854	439,7627
Réduction au pendule composé.............	+ 0,4104	+ 0,4104	— 0,1655
Réduction au vide	— 0,5851	— 0,5849	— 0,1971
Longueur calculée	1303,3028	1303,3109	439,4001
Différence...............	+ 0l,5173	+ 0l,5235	+ 0l,1048
....	— 0l,5676k	— 0l,5673k	— 0l,1913k'

Quinzième détermination (suite). — Eau.

	Pendule court.	Long pendule.	Long pendule.
Position du cylindre......	2e.	2e.	2e.
Temps sidéral de l'observation.............	Juin 23.11h25m	Juin 24.9h8m	Juin 24.11h9m
Hauteur barométrique....	336l.97.20°.1	337l,70.19°,5	337l,86.19°,3
Température de l'appareil .... e'.....	18°,34	18°,175	18°,29
e''.....	18,82	18,68	18,72
e'''.....	19,28	19,105	19,18
Température de l'air......... l'.....	18,37	18,205	18,23
l''.....	19,02	19,26	19,235
Nombre d'oscillations.....	4697	1695-1648	1626-1695
Durée d'oscillation.......	0s,9987951	1s,7196066	1s,7195993
Vis du levier de contact ..	15t,977	21t,907	21t,896
Longueur de la toise		864l,0262	864l,0268
Constante F.............	440l,6393	440,6393	440,6393
Correction de température.	− 0,1002	− 0,0993	− 0,0998
Élasticité du fil	− 0,0014	− 0,0042	− 0,0042
Différence mesurée.......	− 1,4411	− 1,9760	− 1,9750
Longueur mesurée	439.2998	1302,7930	1302,7951
440l,81.tt............., ..	439,7483	1303,4958	1303,4848
Réduction au pendule composé.............	− 0,1655	− 0,4104	− 0,4104
Réduction au vide........	− 0,1969	− 0,5851	− 0,5854
Longueur calculée........	439,3859	1303,3211	1303,3098
Différence...............	− 0l,0861	− 0l,5281	+ 0l,5147
»	− 0l,1911 k'	− 0,5675 k	− 0,5678 k

Moyenne. Long pendule. $0 = + 0^l,5209 - 0^l.5675k + 2,9557\,\varepsilon$.

Pendule court. $0 = - 0^l,0954 - 0^l,1912k' + 0,9971\,\varepsilon$.

Seizième détermination. — Laiton III.

	Long pendule.	Pendule court.	Pendule court.	Long pendule.
Position du cylindre.	1re.	1re.	2e.	2e.
Temps sidéral de l'observation...	Juin 24. 4h 36m	Juin 25. 9h 20m	Juin 26. 10h 11m	Juin 27. 10h 51m
Hauteur barométrique	338l,95.18°,5	339l,05.18°,8	339l,91.19°,·	339l,40.20°,3
Température de l'appareil...... c'...	17°,30	17°,87	17°,98	18°,635
c''...	17,655	18,115	18,48	19,19
c'''..	18,15	18,44	18,93	19,67
Température de l'air... t'...	17,315	17,65	18,01	18,635
t''...	18,365	18,14	18,60	19,915
Nombre d'oscillations	2195-2195	5791	5031	2140-2140
Durée d'oscillation.	1s,7196575	0s,9988985	0s,9987157	1s,7195591
Vis du levier de contact	21t,150	15t,698	15t,723	21t,101
Longueur de la toise.	864l,0163			864l,0317
Constante F.......	440,6388	440,6388	440,6388	440,6388
Correction de température.......	— 0,0933	— 0,0972	— 0,0983	— 0,1019
Élasticité du fil	— 0,0042	+ 0,0014	+ 0,0014	— 0,0042
Différence mesurée.	— 1,9077	— 1,4160	— 1,4182	— 1,9033
Longueur mesurée.	1302,8439	439,3214	439,3203	1302,8733
$440^{l},81 . u$	1303,5730	439,8394	439,6793	1303,4238
Réduction au pendule composé..	+ 0,3896	— 0,1342	— 0,1342	+ 0,3896
Réduction au vide..	— 0,5497	— 0,1854	— 0,1856	— 0,5477
Longueur calculée..	1303,4129	439,5198	439,3595	1303,2657
Différence	+ 0l,5690	+ 0l,1984	+ 0l,0392	+ 0l,3924
....	— 0l,5348 k	— 0l,1804 k'	— 0l,1806 k	— 0l,5329 k

Moyenne... { Long pendule.... 0 = + 0l,4807 — 0l,5339 k — 2,9558
Pendule court.... 0 = + 0l,1188 — 0l,1805 k + 0,0972

Dix-septième détermination. — Laiton III.

	Long pendule.	Pendule court.	Pendule court.	Long pendule.
Position du cylindre.	1re.	1re.	2e.	2e.
Temps sidéral de l'observation...	Juin 27.4h59m	Juin 28.9h21m	Juin 28.11h45m	Juin 29.4h22m
Hauteur barométrique.........	338l,33.19°,0	338l,40.19°,6	338l,11.19°,3	337l,48.19°,3
Température de l'appareil....... e'...	17°,76	18°,25	18°,32	17°,81
e''...	18,185	18,65	18,72	18,235
e'''...	18,83	19,28	19,18	18,585
Température de l'air... l'...	17,76	18,23	18,245	17,815
l''...	19,00	18,77	18,785	18,90
Nombre d'oscillations..........	2177-2177	4342	5006	2187-2158
Durée d'oscillation.	1s,7196597	0s,9988985	0s,9987117	1s,7195691
Vis du levier de contact........	21t,169	15t,707	15t,741	21t,134
Longueur de la toise.	864l,0226			864l,0213
Constante F.......	440,6384	440l,6384	440l,6384	440,6384
Correction de température......	− 0,0970	− 0,0996	− 0,0999	− 0,0972
Élasticité du fil....	+ 0,0042	+ 0,0014	+ 0,0014	+ 0,0042
Différence mesurée.	− 1,9094	− 1,4168	− 1,4198	− 1,9062
Longueur mesurée.	1302,8528	439,3226	439,3199	1302,8549
440l,81.tt.........	1303,5763	439,8394	439,6749	1303,4390
Réduction au pendule composé..	+ 0,3896	− 0,1342	− 0,1342	+ 0,3896
Réduction au vide..	− 0,5478	− 0,1846	− 0,1844	− 0,5464
Longueur calculée..	1303,4181	439,5206	439,3563	1303,2822
Différence.........	+ 0l,5653	+ 0l,1980	+ 0l,0364	+ 0l,4273
»..........	− 0l,5329k	− 0l,1797k'	− 0l,1795k'	− 0l,5318k

Moyenne... { Long pendule.... $0 = - 0^l,4963 - 0^l,5324k + 2,9558\,\varepsilon$
Pendule court.... $0 = - 0^l,1172 - 0^l,1796k' + 0,9972\,\varepsilon$

Dix-huitième détermination. — Laiton III.

	Long pendule.	Pendule court.	Pendule court.	Long pendule.
Position du cylindre.	2e.	2e.	1re.	1re.
Temps sidéral de l'observation...	Juill. 1. 4h 12m	Juill. 2. 10h 26m	Juill. 2. 12h 42m	Juill. 3. 10h 31m
Hauteur barométrique.........	334l.68.19°,9	334l.64.20°,9	334l.66.21°,6	336l,50.[illegible]
Température de l'appareil...... e' ...	18°,83	19°,315	19°,46	19°,265
e'' ...	19,24	19,705	19,95	19,73
e''' ...	19,625	20,145	20,295	20,17
Température de l'air ... t' ...	18,76	19,29	19,48	19,23
t'' ...	19,79	19,925	20,125	20,435
Nombre d'oscillations..........	2143-2172	4881	3575	2191-2191
Durée d'oscillation.	1s,7203913	0s,9995625	0s,9997446	1s,7205070
Vis du levier de contact........	9t,381	7t,0025	7t,6935	9t,3565
Longueur de la toise.	864l,0317			864l,0369
Constante F.......	440l,6387	440l,6387	440l,6387	440l,6387
Correction de température.......	0,1027	0,1053	0,1063	+ 0,1052
Élasticité..........	0,0069	0,0023	+ 0,0023	— 0,0069
Différence mesurée.	0,8462	0,6948	— 0,6940	0,8440
Longueur mesurée.	1303,9338	440,0515	440,0533	1303,9437
440l,81.u	1304,6857	440,4244	440,5848	1304,8612
Réduction au pendule composé..	0,2012	0,1543	0,1543	0,2012
Réduction au vide..	— 0,5418	— 0,1821	0,1821	0,5426
Longueur calculée..	1304,3451	440,0880	440,2484	1304,5198
Différence.........	0l,4113	0l,0365	0l,1951	0l,5761
»	— 0l,5261 k	0l,1773 k	0l,1772 k	0l,5280 k

Moyenne... { Long pendule...... 0 = + 0l,4937 — 0l,5271 k ... [illegible]
{ Pendule court.... 0 = + 0l,1158 — 0l,1773 k ... [illegible]

Dix-neuvième détermination. — Eau.

	Long pendule.	Long pendule.	Pendule court.
Position du cylindre......	1re.	1re.	1re.
Temps sidéral de l'observation............	Juillet 4.9h31m	Juillet 4.11h31m	Juillet 4.4h30m
Hauteur barométrique....	338l,33.21°,3	338l,27.21°,7	338l,54.21°,0
Température de l'appareil .... e'.....	19°,61	19°,88	19°,805
e''.....	20,095	20,34	20,34
e'''.....	20,42	20,765	20,91
Température de l'air......... l'.....	19,79	19,955	19,875
l''.....	20,755	21,165	20,51
Nombre d'oscillations.....	1642-1711	1642-1642	4674
Durée d'oscillation.......	1s,7204430	1s,7204375	0s,9996556
Vis du levier de contact ..	10t,384	10t,345	8t,044
Longueur de la toise	864l,0399	864l,0429	»
Constante F.............	440,6386	440,6386	440l,6386
Correction de température.	+ 0,1071	+ 0,1085	+ 0,1082
Élasticité du fil..........	+ 0,0069	+ 0,0069	+ 0,0023
Différence mesurée.......	— 0,9366	— 0,9331	— 0,7256
Longueur mesurée.......	1303,8559	1303,8638	440,0235
440l,81.u	1304,7642	1304,7558	440,5064
Réduction au pendule composé.............	— 0,2084	+ 0,2084	— 0,1871
Réduction au vide........	— 0,5835	— 0,5830	— 0,1971
Longueur calculée........	1304,3891	1304,3812	440,1222
Différence	— 0l,5332	+ 0l,5174	+ 0l,0987
....	— 0l,5661 k	— 0l,5657 k	— 0l,1901 k'

Dix-neuvième détermination (suite). — Eau.

	Pendule court.	Long pendule.	Long pendule.
Position du cylindre......	2ᵉ.	2ᵉ.	2ᵉ.
Temps sidéral de l'observation............	Juillet 4.6ʰ15ᵐ	Juillet 5.4ʰ38ᵐ	Juillet 6.11ʰ8ᵐ
Hauteur barométrique....	338ˡ,52.21°,7	336ˡ,96.25°,0	336,34.24°,5
Température de l'appareil .... e'	20°,10	20°,98	21°,865
e''	20,515	21,58	22,485
e'''	21,06	22,225	23,24
Température de l'air .... l'	20,18	21,10	21,96
l''	20,815	22,655	23,84
Nombre d'oscillations	4677	1613-1653	1653-1693
Durée d'oscillation.......	0ˢ,9996498	1ˢ,7204445	1ˢ,7204574
Vis du levier de contact ..	8ᵗ,029	10ᵗ,328	10ᵗ,319
Longueur de la toise		864ˡ,0568	864ˡ,0665
Constante F..	440ˡ,6386	440,6386	440,6386
Correction de température.	+ 0,1096	+ 0,1147	+ 0,1195
Élasticité du fil..........	+ 0,0023	+ 0,0069	+ 0,0069
Différence mesurée.	— 0,7242	— 0,9316	— 0,9308
Longueur mesurée	440,0263	1303,8854	1303,9007
440ˡ,81.u	440,5013	1304,7664	1304,7860
Réduction au pendule composé.............	— 0,1871	+ 0,2084	+ 0,2084
Réduction au vide	— 0,1969	— 0,5784	— 0,5755
Longueur calculée........	440,1173	1304,3964	1304,4189
Différence	+ 0ˡ,0910	+ 0ˡ,5110	+ 0ˡ,5182
»	— 0ˡ,1898k'	— 0ˡ,5612k	— 0ˡ,5584k

Moyenne.... { Long pendule..... $o = + 0^l,5200 - 0^l,5629k - 2,9596\,\varepsilon$
{ Pendule court .... $o = - 0,0949 - 0,1900k' - 0,9989\,\varepsilon$

Vingtième détermination. — Laiton IV.

	Pendule court.	Pendule court.
Position du cylindre	2e.	1re.
Temps sidéral de l'observation	Juillet 7.9h53m	Juillet 7.11h21m
Hauteur barométrique	337l,21.22°,8	337l,27.22°,7
Température de l'appareil. c'	21°,645	21°,645
c''	21,985	21,985
c'''	22,99	22,89
Température de l'air. t'	21,625	21,57
t	22,39	22,28
Nombre d'oscillations	2693	2671
Durée d'oscillation	0s,9997312	0s,9997517
Vis du levier de contact	9t,229	9t,259
Constante F	440l,6397	440l,6397
Correction de température	+ 0,1183	+ 0,1183
Élasticité du fil	+ 0,0023	+ 0,0023
Différence mesurée	— 0,8325	— 0,8352
Longueur mesurée	439,9278	439,9251
$440^l,81.tt$	440,5730	440,5911
Réduction au pendule composé	— 0,1974	— 0,1974
Réduction au vide	— 0,2723	— 0,2724
Longueur calculée	440,1033	440,1213
Différence	+ 0l,1755	+ 0l,1962
»	— 0l,2596k'	— 0l,2597k'

Moyenne..... Pendule court ... $0 = +0^l,1859 - 0^l,2597k' + 0,9989\,z$

Vingt et unième détermination. — Laiton IV.

	Pendule court.	Pendule court.
Position du cylindre	1re.	2.
Temps sidéral de l'observation.	Juillet 8.10^h 6^m	Juillet 8.11^h 41^m
Hauteur barométrique............	338^l,28.22°,8	338^l,18.22°,0
	°	°
Température de l'appareil. e ...	20,835	21,03
e' ...	21,48	21,60
e''	22,075	22,175
Température de l'air..... t	20,88	21,045
t' ...	21,63	21,81
Nombre d'oscillations.	2669	2695
Durée d'oscillation....	0^s,9997544	0^s,9997334
Vis du levier de contact	9^t,280	9^t,269
	l	l
Constante F.....................	440,6397	440,6397
Correction de température........	— 0,1140	— 0,1147
Élasticité du fil..................	+ 0,0023	+ 0,0023
Différence mesurée.............	— 0,8371	— 0,8361
Longueur mesurée................	439,9189	439,9206
440^l.81.u.......................	440,5935	440,5750
Réduction au pendule composé....	0,1974	0,1974
Réduction au vide	— 0,2739	— 0,2736
Longueur calculée	440,1222	440,1040
Différence......................	+ 0^l,2033	+ 0^l,1834
»	— 0^l,2611 k'	0^l,2609 k'

Moyenne.... Pendule court..... 0 = + 0^l,1934 — 0^l,2610 k — 0,9989 ε

8. Chacune des déterminations précédentes, prise à part, pourrait donner un résultat, si les quantités inconnues k et k' n'avaient pas d'influence sur ce résultat. Pour éliminer cette influence, il faut comparer les unes aux autres des déterminations faites avec des pendules lourds et avec des pendules légers. Afin de déterminer les valeurs de k et de k', sans avoir à admettre que la longueur du pendule simple à secondes est la même pour les différentes matières, on a employé des pendules de différents poids, construits avec une même matière, le laiton. Toute objection contre la légitimité de la conclusion finale se trouve ainsi écartée; néanmoins, je conduirai le calcul comme il faudrait le faire dans l'hypothèse que la pesanteur imprime la même accélération à toutes les substances sur lesquelles on a expérimenté. De cette façon, on reconnaîtra jusqu'à quel point toutes les expériences se laissent représenter par une seule et même longueur du pendule simple à secondes; cette supposition d'une même longueur sera donc conciliable ou non avec les expériences, suivant que les différences résiduelles seront ou non comprises dans les limites d'exactitude des expériences. Cependant il existe un motif, dont je parlerai plus loin, d'exclure de cette combinaison les déterminations qui ont été faites avec le cylindre rempli d'eau.

Sous le bénéfice de l'hypothèse d'une même longueur du pendule pour toutes les matières, mes expériences antérieures avec les boules de laiton et d'ivoire peuvent aussi figurer dans le nouveau calcul, de sorte que la valeur la plus probable de la longueur du pendule à l'observatoire de Kœnigsberg deviendra, dans cette hypothèse, le résultat de l'ensemble de toutes mes expériences. En fait, les nouvelles expériences serviront non seulement à démontrer l'exactitude de cette hypothèse, mais encore, s'il existe une longueur du pendule à secondes indépendante de la nature du corps oscillant, à accroître la précision de sa détermination.

Avant de combiner ensemble les différentes expériences, il est nécessaire d'en évaluer la précision relative, qui n'est pas la même pour toutes, en raison de la différence des nombres d'oscillations observées. Pour obtenir cette évaluation, je regarde les erreurs des expériences comme résultant de deux causes indépendantes l'une de l'autre: c'est d'abord l'incertitude que les observations des coïncidences laissent dans la durée d'oscillation du pendule;

c'est ensuite l'erreur provenant de la marche de l'horloge et de la mesure de la longueur du pendule. Si l'on désigne par a et b les erreurs moyennes de la longueur du pendule qui proviennent de ces deux causes, le carré de l'erreur moyenne d'une expérience dans laquelle elles interviennent toutes deux est $aa + bb$, et celui de la moyenne arithmétique de n expériences est $\frac{1}{n}(aa + bb)$. Je vais dire maintenant comment j'ai essayé de déterminer les valeurs de ces quantités.

On a pris pour base de la détermination de a les erreurs moyennes des observations des deux pendules données dans l'art. 5 du précédent Mémoire ; leurs valeurs sont, pour l'heure observée d'une oscillation déterminée, pour le long pendule $0^s,00431$, pour le pendule court $0^s,00205$ en temps de la pendule, ou, en temps moyen, $0^s,004299$ et $0^s,002045$. Si l'on appelle α cette erreur, l'erreur moyenne de la durée d'une oscillation provenant de cette cause, pour une expérience qui contient m moments observés, chacun de i oscillations, a pour expression

$$\frac{\alpha}{i}\sqrt{\frac{12}{(m-1)m(m+1)}},$$

et elle a, sur la longueur du pendule correspondant à la durée t d'une oscillation, une influence exprimée par

$$881^l,62\; t\,\frac{\alpha}{i}\sqrt{\frac{12}{(m-1)m(m+1)}}.$$

Pour le long pendule, on peut prendre $t = 1^s,72$ et, pour le pendule court, $t = 1^s,00$; pour le premier, $i = 500$; pour le second, i a une valeur variable. On déduit de là la valeur de a, pour les expériences avec l'un et l'autre pendule,

$$\frac{0^l,045}{\sqrt{(m-1)m(m+1)}} \quad \text{et} \quad \frac{6^l,25}{i\sqrt{(m-1)m(m+1)}}.$$

J'ai supposé l'effet de la deuxième cause proportionnel à la longueur du pendule ; car c'est ainsi qu'agit une incertitude sur la marche de la pendule, et les erreurs sur la mesure de la longueur, que l'on ne peut guère attribuer qu'à des influences inconnues de la température, doivent croître aussi avec la longueur à mesu-

rer. Comme les longueurs des deux pendules sont entre elles en moyenne dans le rapport de 2,9581 à l'unité, j'ai pris b égal à 2,9581 β pour le long pendule, à β pour le pendule court, et j'ai déduit la valeur de β des différences qui existent entre les diverses expériences des onze déterminations faites antérieurement avec la boule de laiton. J'ai trouvé ainsi

$$\beta = 0^l,0026167.$$

J'ai donc pris pour valeur de $aa + bb$, ou du carré de l'erreur moyenne d'une expérience : pour le long pendule,

$$0,00005991 2 + \frac{0,002025}{(m-1)m(m+1)}$$

et, pour le pendule court,

$$0,0000068 47 - \frac{39,0625}{ii(m-1)m(m+1)},$$

et j'ai fait concourir chaque expérience au calcul du résultat en lui donnant un poids en rapport avec l'erreur ainsi déterminée.

Chacune des déterminations antérieures faites avec la boule de laiton repose sur quatre expériences avec le long pendule, pour lesquelles m est égal à 9, et sur deux expériences avec le pendule court, pour lesquelles m est égal à 11, et i à 584 en moyenne. D'après les formules précédentes, les valeurs de $\frac{1}{n}(aa + bb)$ sont donc

0,000015681 et 0,000003467,

dont la somme

0,000019148

est le carré de l'erreur moyenne de l'équation déduite de chaque détermination. Pour les déterminations antérieures avec la boule d'ivoire, dont chacune comprend quatre expériences avec le long pendule, pour lesquelles $m = 3$, et quatre expériences avec le pendule court, pour lesquelles $m = 5$ et i en moyenne $= 618$, on obtient de même

0,00036072 et 0,000001925,

dont la somme est

0,00037997.

La détermination analogue de l'erreur moyenne de chacune

des équations de condition déduites des nouvelles expériences repose sur les données suivantes : pour le long pendule

	$n.$	m	$\frac{1}{n}(aa - bb)$
Laiton I	2	8	0,00003965
» II	4	6	0,00001783
» III	2	2.5	0,00003475
Fer	2	8	0,00003965
Zinc	2	8	0,00003965
Plomb	2	8	0,00003965
Argent	2	8	0,00003965
Or	2	8	0,00003965
Fer météorique	2	8	0,00003965
Pierre météorique	4	7	0,00001485
Marbre	4	6	0,00001783
Argile	2	2.5	0,00003475
Quartz	2	2.5	0,00003475

et pour le pendule court,

		Position du cylindre.				
		I.		II.		
	$n.$	$m.$	$i.$	$m.$	$i.$	$\frac{1}{n}(aa - bb)$.
Laiton I	2	7	1092	7	1190	0,000003468
» II	2	6	1201	6	1291	0,000003484
» III	2	5	1142	5	1255	0,000003538
» »	2	5	1448	4	1667	0,0000035[illegible]
» »	2	4	1447	4	1669	0,000003560
» »	2	6	976	5	895	0,000003575
» IV	2	4	898	4	890	0,000003831
» »	2	4	898	4	890	0,000003831
Fer	2	7	1143	7	1180	0,000003467
Zinc	2	7	1133	7	1198	0,000003467
Plomb	2	7	1145	7	1208	0,000003466
Argent	2	7	1272	7	1053	0,000003468
Or	2	7	1165	7	1135	0,000003468
Fer météorique	2	7	1163	7	1128	0,000003468
Pierre météorique	2	7	1262	7	1162	0,000003465
Marbre	2	6	1165	7	1166	0,000003480
Argile	2	5	1162	5	1176	0,000003543
Quartz	2	6	1061	5	1330	0,000003511

9. Avant de combiner les équations de condition déduites des

premières expériences avec celles qui se déduisent des nouvelles, je les ai légèrement modifiées; au lieu de la dilatation de la toise 0,0000114 que j'avais adoptée d'abord, j'ai pris la valeur que donne la formule de l'art. 2, fondée sur les expériences mêmes du pendule. Avec cette nouvelle valeur, les anciennes équations de condition deviennent :

Observations faites avec la boule de laiton.

$$\left.\begin{array}{l}
0 = +\overset{l}{0},1204 - \overset{l}{0},1339\,k'' + 1,9594\,.\,\varepsilon \\
0 = +0,1166 - 0,1360\,k'' + 1,9594\,.\,\varepsilon \\
0 = +0,1202 - 0,1320\,k'' + 1,9595\,.\,\varepsilon \\
0 = +0,1133 - 0,1310\,k'' + 1,9595\,.\,\varepsilon \\
0 = +0,1171 - 0,1283\,k'' + 1,9596\,.\,\varepsilon \\
0 = +0,1136 - 0,1273\,k'' + 1,9596\,.\,\varepsilon \\
0 = +0,1112 - 0,1298\,k'' + 1,9596\,.\,\varepsilon \\
0 = +0,1185 - 0,1283\,k'' + 1,9597\,.\,\varepsilon \\
0 = +0,1185 - 0,1344\,k'' + 1,9594\,.\,\varepsilon \\
0 = +0,1208 - 0,1347\,k'' + 1,9595\,.\,\varepsilon \\
0 = +0,1142 - 0,1355\,k'' + 1,9594\,.\,\varepsilon
\end{array}\right\}\ \text{Valeur du carré de l'erreur moyenne} = 0,00001948.$$

Observations faites avec la boule d'ivoire.

$$\left.\begin{array}{l}
0 = +\overset{l}{0},5644 - \overset{l}{0},6041\,k'' + 1,9596\,.\,\varepsilon \\
0 = +0,5775 - 0,6080\,k'' + 1,9596\,.\,\varepsilon \\
0 = +0,5878 - 0,6236\,k'' + 1,9599\,.\,\varepsilon \\
0 = +0,5662 - 0,6179\,k'' + 1,9599\,.\,\varepsilon
\end{array}\right\}\ \text{Valeur du carré de l'erreur moyenne} = 0,000037997.$$

Aux équations de condition relatives aux deux pendules (art. 7), qui se déduisent des nouvelles expériences, j'ai encore ajouté une quantité inconnue x. dans le but de corriger les erreurs qui peuvent être restées dans la détermination de la longueur absolue du pendule. L'appareil lui-même ne donne que la différence des longueurs des différents pendules; pour en obtenir les longueurs mêmes, il ne suffit pas de mesurer la longueur de la règle (art. 2) et la distance du centre de figure du cylindre creux à sa pointe (art. 3), il faut admettre, de plus, que le centre du mouvement du pendule est exactement dans le plan sur lequel repose le couteau. Quelques précautions que l'on ait prises dans l'emploi des moyens de mesure dont on disposait, je suis pourtant bien loin de tenir ces mesures pour aussi exactes que les mesures des diffé-

rences que l'appareil du pendule donne directement ; de plus, comme je l'ai remarqué dans mon premier Mémoire, la position du centre du mouvement du pendule reste toujours plus ou moins incertaine. Grâce à l'introduction d'une correction inconnue x ajoutée aux longueurs absolues des pendules dans les équations de condition, l'erreur de mesure de ces longueurs et l'incertitude sur la position du centre du mouvement n'ont plus d'influence nuisible ; et, comme cette quantité inconnue se déduit du calcul par la combinaison des observations faites sur les deux pendules, on obtient, au moyen des nouvelles expériences, la longueur du pendule simple à secondes aussi indépendante des longueurs absolues et de la position du centre du mouvement que la donnaient les anciennes expériences. L'introduction des longueurs absolues dans les données des expériences n'a donc pas d'autre résultat que celui qui a été indiqué dans l'art. I : elle sert à contrôler la concordance des expériences faites sur les deux pendules, et elle rend possible la détermination de l'influence de l'air sur chacune d'elles isolément.

Observations avec le long pendule.

Détermination.	Matière		Carré de l'erreur moyenne.
12	Laiton I	$o = +0,2361 - 0,2802k + 2,9581.\varepsilon - x$	0,00003965
7	» II	$o = +0,3965 - 0,4165k + 2,9568.\varepsilon - x$	0,00001738
13	» III	$o = +0,4947 - 0,5321k + 2,9565.\varepsilon - x$	0,00003475
16	» »	$o = +0,4807 - 0,5339k + 2,9558.\varepsilon - x$	0,00003475
17	» »	$o = +0,4963 - 0,5324k + 2,9558.\varepsilon - x$	0,00003475
18	» »	$o = +0,4937 - 0,5271k + 2,9587.\varepsilon - x$	0,00003475
1	Fer	$o = +0,2600 - 0,2947k + 2,9578.\varepsilon - x$	0,00003965
2	Zinc..............	$o = +0,2550 - 0,2911k + 2,9578.\varepsilon - x$	0,00003965
3	Plomb............	$o = +0,2562 - 0,2906k + 2,9578.\varepsilon - x$	0,00003965
4	Argent	$o = +0,2428 - 0,2865k + 2,9579.\varepsilon - x$	0,00003965
5	Or	$o = +0,2486 - 0,2899k + 2,9579.\varepsilon - x$	0,00003965
8	Fer météorique ..	$o = +0,2491 - 0,2807k + 2,9580.\varepsilon - x$	0,00003965
6	Pierre météorique.	$o = +0,3388 - 0,3804k + 2,9571.\varepsilon - x$	0,00001648
9	Marbre	$o = +0,3344 - 0,3925k + 2,9571.\varepsilon - x$	0,00001738
10	Argile	$o = +0,4128 - 0,4648k + 2,9568.\varepsilon - x$	0,00003475
14	Quartz...........	$o = +0,4606 - 0,5014k + 2,9565.\varepsilon - x$	0,00003475

Observations avec le pendule court.

Détermination.	Matière.		Carré de l'erreur moyenne.
12	Laiton I	$0 = +0^{\mathrm{l}},0589 - 0^{\mathrm{l}},0948\,k' + 0,9983.\varepsilon - x$	0,000003468
7	» II	$0 = +0,1035 - 0,1410\,k' + 0,9980.\varepsilon - x$	0,000003484
13	» III........	$0 = +0,1362 - 0,1796\,k' + 0,9980.\varepsilon - x$	0,000003538
16	» »	$0 = +0,1188 - 0,1805\,k' + 0,9972.\varepsilon - x$	0,000003522
17	» »	$0 = +0,1172 - 0,1796\,k' + 0,9972.\varepsilon - x$	0,000003560
18	» »	$0 = +0,1158 - 0,1773\,k' + 0,9989.\varepsilon - x$	0,000003575
20	» IV........	$0 = +0,1859 - 0,2597\,k' + 0,9989.\varepsilon - x$	0,000003831
21	» ».......	$0 = +0,1934 - 0,2610\,k' + 0,9989.\varepsilon - x$	0,000003831
1	Fer	$0 = +0,0678 - 0,0996\,k' + 0,9983.\varepsilon - x$	0,000003467
2	Zinc.......... ..	$0 = +0,0652 - 0,0972\,k' + 0,9982.\varepsilon - x$	0,000003467
3	Plomb..........	$0 = +0,0668 - 0,0981\,k' + 0,9982.\varepsilon - x$	0,000003466
4	Argent.........	$0 = +0,0676 - 0,0968\,k' + 0,9983.\varepsilon - x$	0,000003468
5	Or..............	$0 = +0,0624 - 0,0981\,k' + 0,9983.\varepsilon - x$	0,000003468
8	Fer météorique ..	$0 = +0,0650 - 0,0947\,k' + 0,9983.\varepsilon - x$	0,000003468
6	Pierre météorique.	$0 = +0,0894 - 0,1285\,k' + 0,9981.\varepsilon - x$	0,000003465
9	Marbre..........	$0 = +0,0873 - 0,1324\,k' + 0,9981.\varepsilon - x$	0,000003480
10	Argile...........	$0 = +0,1058 - 0,1566\,k' + 0,9981.\varepsilon - x$	0,000003543
14	Quartz.........	$0 = +0,1197 - 0,1694\,k' + 0,9980.\varepsilon - x$	0,000003511

Les valeurs les plus probables des quantités inconnues, d'après l'ensemble des quarante-neuf équations de condition, sont

$$k'' = 0,95569,$$
$$k' = 0,75487,$$
$$k = 0,95190;$$
$$x = -0^{\mathrm{l}},00427,$$
$$\varepsilon = -0^{\mathrm{l}},00537.$$

10. La substitution de ces valeurs dans les équations de condition va maintenant nous montrer jusqu'à quel point les expériences faites sur les différentes substances se laissent représenter par une seule et même longueur du pendule simple à secondes. Le Tableau suivant donne, dans sa première colonne, le résidu de chacune des équations de condition, et, dans la seconde, l'altération qu'il faudrait faire subir à la longueur du pendule à secondes déduite de l'ensemble, $440^{\mathrm{l}},81537$, pour satisfaire rigoureusement à chacune des équations.

Anciennes expériences faites avec la boule de laiton.

Numéro.	Résidu.	Pendule à secondes.
	s	s
1	− 0,0030	− 0,0015
2	− 0,0028	− 0,0014
3	− 0,0046	− 0,0023
4	− 0,0014	+ 0,0007
5	0,0050	0,0026
6	− 0,0025	− 0,0013
7	− 0,0023	− 0,0012
8	− 0,0064	0,0033
9	− 0,0006	− 0,0003
10	− 0,0026	− 0,0013
11	− 0,0048	− 0,0024

Anciennes expériences faites avec la boule d'ivoire.

Numéro.	Résidu.	Pendule à secondes.
	s	s
12	+ 0,0024	− 0,0012
13	− 0,0070	− 0,0036
14	− 0,0024	− 0,0012
15	− 0,0138	− 0,0070

Nouvelles expériences faites avec le long pendule.

	Numéro.	Résidu.	Pendule à secondes.	
		s	s	
Laiton I	12	− 0,0105	0,0035	
» II	7	− 0,0202	− 0,0068	
» III	13	− 0,0083	− 0,0028	
» »	16	− 0,0074	− 0,0025	− $0^{s},0019$
» »	17	− 0,0097	0,0033	
» »	18	+ 0,0121	− 0,0041	
Fer	1	− 0,0004	0,0001	
Zinc	2	− 0,0019	+ 0,0006	
Plomb	3	− 0,0003	0,0001	
Argent	4	− 0,0097	− 0,0033	
Or	5	− 0,0071	− 0,0024	
Fer météorique	8	0,0021	0,0007	
Pierre météorique	6	− 0,0032	− 0,0011	
Marbre	9	0,0191	0,0064	
Argile	10	− 0,0095	0,0032	
Quartz	14	− 0,0035	− 0,0012	

Nouvelles expériences faites avec le pendule court.

	Numéro.	Résidu.	Pendule à secondes.	
		l	l	
Laiton I	12	— 0,0030	+ 0,0030	
» II	7	+ 0,0067	— 0,0067	
» III	13	— 0,0103	— 0,0103	
» »	16	— 0,0078	+ 0,0078	
» »	17	— 0,0087	+ 0,0087	+ 0l,0037
» »	18	— 0,0084	+ 0,0084	
» IV.........	20	— 0,0005	+ 0,0005	— 0l,0028
» »	21	— 0,0060	— 0,0060	
Fer...............	1	+ 0,0023	— 0,0023	
Zinc..............	2	— 0,0015	— 0,0015	
Plomb............	3	+ 0,0024	— 0,0024	
Argent	4	+ 0,0042	— 0,0042	
Or................	5	— 0,0020	+ 0,0020	
Fer météorique....	8	— 0,0032	— 0,0032	
Pierre météorique.	6	— 0,0021	— 0,0021	
Marbre....	9	— 0,0030	+ 0,0030	
Argile............	10	— 0,0027	+ 0,0027	
Quartz...........	14	+ 0,0015	— 0,0015	

Il résulte de ce Tableau que toutes les expériences peuvent se représenter d'une façon très suffisante par une seule longueur du pendule simple à secondes; car aucun des résidus n'atteint une valeur telle qu'on ne puisse l'attribuer aux erreurs inévitables des expériences. En fait, le plus grand écart de la longueur du pendule simple à secondes, pour les différentes substances, à la longueur moyenne déduite de l'ensemble, n'atteint pas la soixante millième partie de cette longueur.

Je n'ai pas fait entrer dans le calcul général les expériences faites sur le cylindre rempli d'eau, parce qu'il n'est pas certain que la réduction du pendule composé au pendule simple puisse se calculer, dans ce cas, d'après la théorie qui s'applique à un pendule formé d'un corps solide. Les particules de l'eau situées dans la partie supérieure du cylindre acquièrent, pendant le mouvement du pendule, une force centrifuge plus grande que celles de la partie inférieure; d'où il suit que l'eau doit se mettre en mouvement dans l'intérieur du cylindre. Ce mouvement peut modifier le moment d'inertie, et produira d'ailleurs une modification

plus considérable dans le cas du pendule court que pour le long pendule; comme l'influence d'une variation du moment d'inertie sur la réduction du pendule composé au pendule simple est, d'autre part, en raison inverse de la longueur du pendule, l'influence du mouvement de l'eau dans le cylindre, si toutefois elle est sensible, sera beaucoup plus faible sur le long pendule que sur le plus court.

Les trois déterminations de l'art. 7, faites avec le cylindre rempli d'eau, donnent les équations de condition suivantes : pour le long pendule,

N° de la dét.	
11	$0 = +0^{\mathrm{l}},5314 - 0^{\mathrm{l}},5699k + 2,9565.\varepsilon - x$
15	$0 = +0,5209 - 0,5675k + 2,9557.\varepsilon - x$
19	$0 = +0,5200 - 0,5629k + 2,9596.\varepsilon - x$

et pour le pendule court,

N° de la dét.	
11	$0 = -0^{\mathrm{l}},1186 - 0^{\mathrm{l}},1927k' + 0,9979.\varepsilon - x$
15	$0 = -0,0954 - 0,1912k' + 0,9971.\varepsilon - x$
19	$0 = -0,0949 - 0,1900k' + 0,9989.\varepsilon - x$

Si l'on y substitue les valeurs de k, k', ε et x trouvées à l'art. 9, ces équations donnent les résidus suivants :

$-0^{\mathrm{l}},0093$	$+0^{\mathrm{l}},0192$
$+0,0009$	$+0,0393$
$-0,0043$	$-0,0389$

On voit donc que les observations du long pendule s'accordent avec la longueur du pendule simple à secondes qui correspond aux autres expériences, à $0^{\mathrm{l}},0016$ près, par conséquent dans les limites de l'erreur inévitable des expériences; mais les observations du pendule court donnent une erreur plus grande, $0^{\mathrm{l}},0318$. Il me paraît très probable que cette différence a sa source dans le mouvement intérieur de l'eau; on ne pourrait, d'ailleurs, l'expliquer par une différence d'action de la pesanteur sur l'eau, puisque les observations du long pendule ne manifestent rien de pareil. L'écart considérable de la première déterumination par rapport

aux deux autres, bien plus grand qu'on ne doit l'attendre de la précision des observations, rend très vraisemblable la supposition que le cylindre n'était pas complètement rempli d'eau; c'est aussi ce qu'indique le poids plus faible qu'on a trouvé pour l'eau dans cette détermination (art. 5). Après que les pesées de la deuxième détermination eurent donné un poids plus fort de 6,5 grains, on prit plus de précautions encore pour écarter toute bulle d'air, et surtout pour éviter que l'évaporation de l'eau pût laisser aucun vide dans le cylindre creux. Je regarde donc la première détermination comme moins sûre que les deux autres [1].

---

[1] L'explication de Bessel paraît difficile à admettre. En premier lieu, il n'est pas exact que la force centrifuge des couches supérieures du liquide soit plus grande que celle des couches inférieures. Tous les points du pendule ont la même vitesse angulaire, et l'on ne voit pas comment la différence des forces centrifuges pourrait donner naissance à un mouvement du fluide. En second lieu, cette force est le produit d'une vitesse linéaire par une vitesse angulaire, et celle-ci étant supposée infiniment petite, le produit est une quantité d'ordre supérieur, qui ne peut altérer sensiblement le mouvement du pendule.

Ces considérations ont conduit M. G. Lübeck à reprendre, en 1873, l'examen de la question. Dans un premier Mémoire (*Journal de Crelle-Borchardt*, 77, 1874, p. 1), il a cherché à calculer l'influence, sur le mouvement du pendule, d'un liquide incompressible, doué de frottement intérieur, renfermé dans le corps creux suspendu au fil du pendule. La forme cylindrique de la masse d'eau de Bessel offrant des difficultés de calcul, M. Lübeck a supposé le fluide renfermé dans une sphère creuse. Partant des équations connues du mouvement d'un fluide incompressible, lorsqu'on tient compte du frottement intérieur, l'auteur considère le mouvement d'amplitude infiniment petite de cette sphère comme résultant de la superposition d'un mouvement de translation rectiligne, et d'un mouvement oscillatoire de la sphère autour du diamètre perpendiculaire au plan d'oscillation du pendule.

L'examen des conditions du premier mouvement conduit à ce résultat que « le fluide renfermé dans la boule ne peut ni ralentir ni accélérer le mouvement de cette boule; ce liquide se comporte, relativement au mouvement pendulaire rectiligne, comme un corps solide, dont chaque particule a la même vitesse que l'enveloppe, si le fluide ne possédait pas de vitesse initiale. »

Mais quant à la deuxième espèce de mouvement, on trouve qu'il produit dans le liquide lui-même, en raison des frottements, des oscillations autour du même diamètre et dans le même sens, avec des vitesses angulaires variables d'une couche à l'autre, mais constantes sur chaque couche concentrique à la sphère.

Abstraction faite de la résistance que le milieu environnant oppose à son mouvement, le pendule est soumis à l'action de trois forces : la pesanteur, la pression du liquide sur la paroi de la sphère creuse, et le frottement qui s'exerce entre cette paroi et le liquide. On peut écrire alors l'équation différentielle du mouvement du pendule, et la discussion de ce mouvement conduit aux conclusions suivantes :

1° Un mouvement initial accidentel du fluide, s'il est de l'ordre de la vitesse

11. Les expériences que je viens de rapporter ne laissent aucune raison de supposer que la longueur du pendule simple à secondes dépende de la nature du corps oscillant. Elles confirment

---

pendulaire, s'éteint au plus tard, sous l'influence du frottement intérieur, après un temps $T = \frac{4}{35}\frac{a^2}{\gamma^2}$ log. nat. W. Dans cette formule, a est le rayon de la sphère, γ^2 est l'indice du frottement ou le quotient du coefficient de frottement intérieur par la densité, et W l'angle de déviation initial du pendule.

2° Après un intervalle de temps T, ou dès l'origine, si le liquide était en repos au commencement de l'expérience, le mouvement du pendule est absolument périodique.

3° L'amplitude de l'oscillation décroît en progression géométrique, quand le temps croît en progression arithmétique.

4° La durée de l'oscillation est plus grande que si la boule du pendule contenait un liquide parfait, au lieu du liquide doué de frottement.

5° Mais le plus souvent la durée de l'oscillation est moindre que si le liquide était remplacé par un corps solide de même masse. Quand la longueur du pendule est très grande (par rapport au rayon de la sphère), le frottement intérieur n'a aucune influence sur le mouvement de ce pendule.

Ces résultats sont conformes à ceux qu'a obtenus Bessel et, par conséquent, l'existence du frottement intérieur et le mouvement du fluide qui en résulte semblent rendre compte de l'anomalie présentée par le pendule dont le cylindre est rempli d'eau. Mais, lorsqu'on calcule l'influence de ce frottement en donnant à γ (racine carrée de l'indice de frottement) la valeur 0¹,44 déterminée par M. O. E. Meyer, on trouve qu'elle est de beaucoup inférieure aux erreurs d'observation, en raison de ce fait que γ est extrêmement petit relativement au rayon de la sphère. Il suit de là qu'il est inutile d'avoir égard au frottement intérieur, et qu'on peut regarder la masse d'eau contenue dans le cylindre de Bessel comme un liquide parfait.

C'est ce second cas que M. G. Lübeck a traité dans un nouveau Mémoire (*Ann. de Pogg.*, 150, 1873, p. 476). Dans cette hypothèse, le liquide participe au mouvement de translation rectiligne de l'enveloppe, mais non au mouvement d'oscillation, de sorte que, si le premier n'existait pas, la masse resterait en repos absolu. Ceci est évident dans le cas d'une sphère creuse. Si le liquide est renfermé dans un cylindre, ou dans une enveloppe de forme quelconque, faisant des oscillations infiniment petites, une portion, infiniment petite aussi, du fluide est chassée, par le mouvement de la paroi, de la position qu'elle occupait dans l'espace et que vient prendre la paroi, dans la place que laisse libre le mouvement de cette paroi. Mais le reste de la masse liquide reste en repos. Si l'on calcule, dans ces conditions, le mouvement du pendule, on arrive à l'expression suivante de la durée d'oscillation

$$\frac{T^2}{\pi^2} = \frac{M(k^2 + L^2) + ml^2}{g(ML + ml)},$$

qui diffère de celle qu'a employée Bessel, en assimilant le liquide à un solide de même masse fixé dans l'enveloppe, en ce que, dans la somme des moments d'inertie, ne figure pas celui du fluide par rapport à la parallèle au couteau mené par son centre de gravité. En calculant par cette formule la longueur du pendule

donc la loi que les masses des corps terrestres sont proportionnelles aux attractions qu'elles éprouvent. La longueur du pendule simple à secondes, qui résulte de la combinaison de toutes les expériences, est, pour l'observatoire de Kœnigsberg,

440,8154 lignes.

Elle ne diffère que d'une quantité insignifiante, $0^l,0007$, de la longueur déduite des premières expériences seules. Mais les expériences contenues dans ce Mémoire, en même temps qu'elles augmentent l'exactitude de cette détermination, nous démontrent

---

simple à secondes d'après les déterminations 11, 15 et 19 de Bessel, M. Lübeck obtient pour résidu des équations de conditition :

N° de la dét.	Long pendule.	Pendule court.
	l	l
11..........	− 0,0080	− 0,0265
15.	− 0,0053	− 0,0045
19............	− 0,0064	− 0,0049

Les résidus des deux dernières déterminations sont inférieurs aux plus grandes valeurs admissibles des erreurs d'observation, telles qu'elles résultent de l'ensemble des déterminations faites sur des corps solides. Au contraire, les valeurs calculées d'après la détermination 11, et en particulier pour le pendule court, les dépassent notablement. Mais Bessel lui-même donne le résultat de ces dernières observations comme peu certain, attendu que l'eau paraissait ne pas remplir entièrement le cylindre.

M. le Dr Wangerin, en rendant compte du Mémoire de M. Lübeck, dans les *Fortschritte der Physik* (29, 1873, p. 176), objecte à ses conclusions qu'elles reposent sur l'hypothèse qu'il existe un potentiel des vitesses, c'est-à-dire que les trois composantes de la vitesse sont les dérivées d'une même fonction, et qu'on pourrait supposer un mouvement du fluide pour lequel ce potentiel n'existerait pas. Mais il semble difficile d'admettre d'autres mouvements qu'un mouvement pendulaire, et un tel mouvement est précisément un de ceux pour lesquels l'existence d'un potentiel des vitesses est démontrée.

Une autre objection se présente plus naturellement à l'esprit : comment le frottement intérieur peut-il ne pas intervenir dans une expérience qui dure assez longtemps pour comprendre plusieurs milliers d'oscillations? Il faut remarquer qu'en réalité, dans un mouvement pendulaire, le frottement change de sens à chaque oscillation, et qu'ainsi l'accumulation nécessaire à la manifestation de ses effets ne peut se produire.

On est donc en droit de conclure, avec M. G. Lübeck, que les observations faites sur l'eau donnent la même longueur du pendule simple à secondes que les expériences faites sur les corps solides, pourvu qu'on les calcule en tenant compte de la différence essentielle qui existe entre les solides et les liquides, qui fait que ces derniers ne participent pas comme les autres au mouvement oscillatoire du pendule. (C. W.)

maintenant que cette longueur est indépendante de la nature de la substance dont est formé le pendule.

Si, pour une seule ou pour quelques-unes des substances soumises à l'expérience, on avait trouvé un écart qui dépassât les limites probables de l'erreur des observations, il eût été utile de poursuivre les recherches, soit pour mettre cet écart hors de doute, soit pour montrer qu'il était dû aux erreurs d'expérience. Mais, puisque les différences sont toujours restées au-dessous de ces limites, et que le contrôle qui ressort de la comparaison des deux pendules de l'appareil assure la précision du résultat obtenu pour chaque espèce de matière, je n'ai pas cru nécessaire d'augmenter encore le nombre déjà grand des expériences. Ainsi je n'ai pas fait usage des échantillons de fer météorique du Mexique et de Sibérie que M. le professeur Weiss avait mis à ma disposition : la certitude de trouver pour toutes les substances une même longueur du pendule était devenue si grande par les expériences déjà faites, que je ne me croyais plus autorisé à enlever à ces rares échantillons une notable portion de leur valeur en leur donnant la forme nécessitée par les expériences.

Relativement à la différence que les expériences ont fait ressortir entre les valeurs du facteur k pour les deux pendules, je remarquerai encore que, bien que cette inconnue soit déterminée moins avantageusement à l'aide du pendule court qu'au moyen des expériences faites sur le long pendule, néanmoins l'incertitude n'en peut être regardée comme si grande qu'elle puisse suffire à expliquer la différence trouvée. On voit, par les équations de condition de l'art. 9, que les expériences faites avec des charges considérables ou faibles du pendule court, qui présentent un accord des plus satisfaisant, s'accordent au contraire à peine à $\frac{1}{100}$ de ligne près, lorsqu'on essaye d'adopter pour le pendule court la même valeur de k qui convient au pendule le plus long.

SUR LA RÉDUCTION AU VIDE

DES

OSCILLATIONS D'UN PENDULE INVARIABLE

Par le Capitaine EDWARD SABINE,

DE L'ARTILLERIE ROYALE, SECRÉTAIRE DE LA SOCIÉTÉ ROYALE.

Mémoire lu à la Société Royale les 12 et 19 mars 1829.

Le n° 128 des *Astronomische Nachrichten* du professeur Schumacher, paru en janvier 1828, contenait une Note de M. Bessel, annonçant qu'il avait reconnu que la théorie d'après laquelle on a l'habitude de réduire les oscillations d'un pendule dans l'air à ce qu'elles seraient dans le vide est incorrecte ; et que l'incorrection vient principalement de ce que la théorie ne tient pas compte de la dépense d'une partie de la force motrice employée à mettre en mouvement les particules d'air que le pendule rencontre dans ses oscillations.

A l'arrivée à Londres du numéro des *Astronomische Nachrichten* contenant l'annonce de cette découverte, la proposition fut faite à l'ancien Bureau des Longitudes (1) de soumettre la question de la réduction des oscillations au vide à l'épreuve de l'expérience directe, par la construction d'un appareil dans lequel un

(1) Le Bureau des Longitudes, établi en 1818 par un Acte du Parlement, avait pour fonctions de renseigner l'Amirauté sur les perfectionnements des méthodes propres à la détermination des longitudes à la mer, et de surveiller la publication du *Nautical Almanac*. Il fut aboli en 1828, l'année même où Sabine commença ses expériences. [*Voir*, sur les motifs de cette abolition, la biographie de Th. Young, par Arago (t. III des *Œuvres*, p. 285 et suiv.)]

pendule pourrait osciller alternativement dans l'air sous la pression atmosphérique entière, et dans un air raréfié presque au vide parfait. Le prix de l'appareil proposé fut estimé à 25 livres, et le Bureau des Longitudes alloua cette somme, sur la recommandation du Président de la Société Royale et du D[r] Young, Secrétaire du Bureau. M. Newmann, à qui l'appareil fut commandé, apporta tous ses soins à le construire dans les meilleures conditions; et, grâce à son économie, la dépense n'a dépassé que de très peu le montant du devis. Dans quelles limites l'appareil répondait au but proposé, c'est ce que montreront les expériences elles-mêmes.

L'appareil est représenté dans la *Pl. I*, à laquelle il faut se référer pour les dimensions de ses diverses parties. Il est composé, d'une manière générale, de six pièces, outre la charpente en fer par laquelle la suspension est fixée invariablement au mur de l'appartement. Le piédestal est en fonte de fer, de 2 pouces d'épaisseur; c'est un cylindre de 1 pied de haut et de 1 pied de diamètre intérieur, ouvert par le haut, et fermé à la base par une plaque horizontale de 3 pieds de long sur 16 pouces de large, reposant sur quatre vis, qui servent à l'élever ou à l'abaisser et à la mettre de niveau. Un tube métallique communiquant avec une pompe à air est adapté à un trou foré à mi-hauteur du cylindre. Ce tube est muni d'un robinet qui permet d'établir ou d'interrompre à volonté la communication de l'intérieur du cylindre avec la pompe. Les trois pièces qui viennent successivement au-dessus de ce piédestal sont des cylindres en verre légèrement coniques, dont les bases ont été rodées de manière à s'appliquer exactement les unes sur les autres. La pièce de suspension, qui vient immédiatement au-dessus de ces cylindres, est une plaque de métal, percée de trous pour recevoir les vis de la plaque qui porte les plans d'agate et pour permettre le passage de la tige du pendule. Cette pièce est entourée d'un anneau circulaire de métal, qui forme une partie de l'enveloppe de l'appareil, et dont les bords supérieur et inférieur sont rodés de manière à s'adapter exactement, au-dessous avec le dernier cylindre de verre, et au-dessus avec une cloche en verre qui forme la sixième pièce et le sommet de l'appareil. L'anneau qui entoure la pièce de suspension est percé pour laisser passer, à travers une

boîte à étoupes, une vis avec laquelle on agit sur le plan incliné placé sous les supports en Y ou fourchettes qui servent à soulever le pendule ou à l'abaisser sur les plans d'agate. Le cylindre du piédestal est également percé pour laisser passer une tige portant à son extrémité une pièce en croix (une étoile), avec laquelle on arrête le pendule ou on le met en mouvement. Cette tige traverse aussi une boîte à cuirs.

Pour monter l'appareil, on place le piédestal aussi exactement que possible dans la situation qu'il devra occuper lorsque la pièce de suspension sera scellée dans le mur. A l'aide d'un support en bois adapté dans l'intérieur du cylindre, on fixe un arc gradué, de telle façon qu'il puisse être vu, dans la lunette des coïncidences, à 2 pouces environ au-dessus du cylindre de fonte. On met ensuite les trois cylindres en verre les uns sur les autres, l'inférieur reposant sur la surface rodée du bord du cylindre de fonte ; les joints sont assurés par un enduit gras. On ajuste alors les vis de la base du piédestal, jusqu'à ce que le cylindre de verre supérieur soit amené en bonne position par rapport au support en fer au moyen duquel l'appareil doit finalement être fixé au mur. On pose la pièce de suspension sur ce cylindre de verre, sur lequel elle pèse de tout son poids, assurant ainsi le contact des surfaces de verre et de métal. Après avoir couronné l'appareil de la cloche en verre, on y fait le vide, et le poids de l'atmosphère sur l'enveloppe amène les divers joints au contact parfait. Avant de faire rentrer l'air, on serre fortement quatre vis horizontales marchant dans des écrous qui font corps avec le support en fer, jusqu'à ce que la pression de ces vis sur le pourtour de l'anneau qui entoure la plaque de suspension la rende solidaire du support en fer.

Ce support est lui-même fortement vissé à des piliers en pierre profondément encastrés dans le mur de part et d'autre, et est encore renforcé par des équerres placées de façon à s'opposer directement à tout mouvement de vibration que le pendule tendrait à imprimer à sa suspension. On fait ensuite rentrer l'air, on enlève la cloche de verre, on visse les plans d'agate et on les nivelle, on suspend le pendule, en même temps que les thermomètres, le baromètre et l'éprouvette dont on aura besoin, et l'on remet la cloche de verre en place. Toutes les parties au-dessous de la cloche forment dès lors un tout invariable, dans lequel on peut

faire le vide ou laisser rentrer l'air à volonté à l'aide du tube métallique et de son robinet.

Comme les trois pièces de verre intermédiaires sont fortement pressées entre la pièce de suspension et le piédestal, qui ne laissent aucun jeu à leur dilatation, on s'exposerait peut-être à les voir se briser, si on laissait l'appareil fixé par ses vis pendant un temps assez long pour qu'il pût survenir une variation notable de la température. Pour éviter cet accident, il suffit de desserrer les vis qui relient le support en fer à la pièce de suspension ; on les serre à nouveau quand la température a produit son effet et l'on nivelle les plaques de suspension.

Cette description s'applique à l'appareil tel qu'il est maintenant établi dans l'angle sud-ouest de la salle du Quart de Cercle, à l'Observatoire Royal de Greenwich ; on a choisi un angle, parce que les piliers de pierre contre lesquels est vissé le support en fer ne doivent dans ce cas s'avancer en dehors du mur qu'à une faible distance pour former appui des deux côtés. L'appareil avait été installé, pour les deux premières expériences, dans la maison de M. Browne, à Londres [1], où il avait été impossible de recourir à ce moyen de rendre inébranlable le point de suspension du pendule. Dans ces expériences, les plans d'agate étaient vissés sur une plaque de fer qui était supportée par quatre montants en fer fixés à l'intérieur du cylindre du piédestal ; et la cloche en verre reposait sur le cylindre de verre supérieur, sans interposition de la pièce de suspension. On verra par les résultats de ces deux expériences, comparés aux résultats de celles où le point de suspension a été rendu inébranlable, que le petit mouvement du support du pendule occasionné par l'élasticité des montants en fer n'a point eu d'effet nuisible sur le résultat comparatif de la mise en oscillation dans l'air à diverses densités ; si bien que lorsqu'on ne demande qu'un résultat relatif, l'appareil peut le donner, sans qu'il soit besoin de recourir aux moyens employés à Greenwich pour rendre la suspension inébranlable.

Grâce à la libéralité des Administrateurs de l'Institution Royale, nous avons pu faire usage, pour nos expériences, de la pompe à

(1) C'est dans cette maison qu'avaient été faites les expériences de H. Kater, en 1817. (*Voir* t. IV de ce *Recueil*.) (C. W.)

air appartenant à cette Institution, et aussi d'un appareil pour la production de l'hydrogène, en vue d'essais qui seront décrits en leur place. Nous allons maintenant relater les expériences dans l'ordre où elles ont été faites, ce qui est la manière la plus simple et peut-être la plus claire de les présenter.

28 *juin* 1828. — Ce jour-là, M. Newmann ayant apporté à Portland Place toutes les pièces de l'appareil destiné aux expériences dans le vide, on le monta devant l'horloge de Molyneux que possède M. Browne. Le pendule invariable n° 12 (1) fut placé sur les plans d'agate portant aussi le n° 12, qui étaient vissés solidement sur la plaque de fer portée par les quatre montants en

---

(1) Les deux pendules employés par Sabine, le n° 12 et le n° 13, étaient construits sur le modèle exact du pendule invariable de Kater, dont ce savant avait fait usage, en 1818 et 1819, dans ses expériences pour déterminer la variation de longueur du pendule à secondes dans les principales stations de la triangulation de la Grande-Bretagne. (*Voir* la *Bibliographie,* p. B-88.) On en trouvera la description dans le Volume CIX des *Philosophical Transactions,* 1819, p. 341. La planche jointe au Mémoire de Sabine, qui a été reproduite ici par la phototypie, donne une idée très suffisante de la forme de ce pendule. J'ajoute seulement que la barre plate de laiton formant la tige avait 1,6 pouce de largeur et un peu moins de $\frac{1}{8}$ de pouce d'épaisseur. Le poids, en forme de disque circulaire plat, était fixé à la tige par des vis et des rivets, et de plus soudé à l'étain; sa distance au couteau était telle que le pendule faisait deux oscillations de moins que le balancier de l'horloge en huit ou neuf minutes (en six minutes dans les expériences de Sabine). La queue par laquelle la tige se prolonge au-dessous du poids était recouverte d'un vernis noir, pour faciliter l'observation des coïncidences. La construction et le mode d'attache du couteau sont les mêmes que Kater avait employés pour son pendule réversible. (*Voir* t. IV de ce *Recueil,* p. 80.) Le poids total était de 15 livres 2 onces. Les plans d'agate étaient fixés sur un support en métal de cloche.

L'histoire des 13 pendules, qui furent successivement construits sur le modèle de celui de Kater, a été donnée par le Major John Herschel, dans le Tome V des *Operations of the Great Trigonometrical Survey of India*, 1879, p. 33, sous le titre : *Notes for a history of the use of invariable Pendulums.* (*Voir* la *Bibliographie,* p. B-190.) Le pendule n° 12 était neuf, lorsque Sabine l'employa en 1828, sur l'invitation de la Société Royale, à la détermination de la différence du nombre de vibrations exécutées, par un pendule invariable, à l'Observatoire de Greenwich et à Londres (voir *Bibliographie,* p. B-106), et simultanément à ses expériences dans le vide. Le couteau de ce pendule fut ensuite repoli, et Sabine s'en servit pour déterminer la différence de la gravité à Greenwich et à Altona (*Ibid.*, p. B-107). Sir J. Herschel ne sait pas ce qu'il est devenu.

Le pendule n° 13 était neuf aussi, quand Sabine en fit usage à l'Observatoire de Greenwich. Il fut ensuite envoyé à Bruxelles et, à partir de cette époque, on le perd de vue. (C. W.)

fer, et avaient été soigneusement nivelés. Le thermomètre, gradué par M. Daniell et moi-même, dont j'avais fait usage dans mes expériences antérieures, était suspendu contre la paroi intérieure des cylindres de verre, à une hauteur telle que son réservoir était à égale distance de l'axe de suspension et de la partie inférieure du poids du pendule. Une éprouvette à mercure, qui commençait à entrer en action quand la pression était réduite à 10 pouces, était suspendue à côté. Le pendule se trouvait à 1 pied 6 pouces en avant du balancier de l'horloge ; et la lunette pour observer les coïncidences était placée dans une chambre voisine, à 18 pieds 6 pouces du pendule et à 20 pieds du balancier de l'horloge. Un diaphragme isolé, percé d'une ouverture verticale dont les côtés, vus de la lunette, étaient tangents au disque (¹), était placé entre l'appareil du vide et la lentille, de telle façon que, les cylindres de verre étant en place, le disque et le diaphragme étaient vus tous deux dans la lunette à travers la paroi postérieure et la paroi antérieure du cylindre inférieur. Sur ce diaphragme était fixé un arc gradué; la distance de l'axe du pendule au point de sa tige qui croisait cet arc dans le champ de la lunette était de 49,5 pouces; l'arc était divisé en degrés et les degrés étaient subdivisés en dixièmes: la longueur du degré était de 0,73 pouce : en conséquence, la lecture de l'arc devait être multipliée par 0,845 pour donner le véritable arc d'oscillation (²). On ajustait alors la lunette pour les

(¹) Le mode d'observation des coïncidences était celui qu'avait employé Kater. (*Voir* t. IV de ce *Recueil*, p. 84.) Le disque dont il est parlé ici est donc le morceau circulaire de papier blanc collé sur la lentille du balancier de l'horloge. L'observateur ayant l'œil à la lunette voit la queue noircie du pendule, dans la position de repos de ce pendule et du balancier, recouvrir exactement l'ouverture du diaphragme et le disque. Mais, tandis que Kater prenait pour moment de la coïncidence (p. 86) le temps où la tache blanche disparaissait complètement sous la queue du pendule marchant dans le même sens, Sabine prend pour cet instant la moyenne des moments de la disparition et de la réapparition du bord de la tache. Ses Tableaux d'observation donnent ces deux nombres; forcé, par des raisons typographiques, de réduire la largeur de ces Tableaux, je n'y ai conservé que la moyenne seule. (C. W.)

(²) La distance de l'échelle à l'axe de suspension étant 49,5 pouces, la longueur de l'arc d'un degré aurait dû être 0,864 pouce, dont le rapport à 0,73 est bien l'inverse de 0,845. Sabine ne tient donc pas compte de cette autre circonstance que l'échelle était placée à une distance de la lunette plus grande que celle de la queue même du pendule, ce qui augmentait la longueur de l'arc lu directement. Comme d'ailleurs il n'indique pas cette distance, on ne peut savoir exactement dans quelle proportion le facteur 0,845 devrait être altéré. (C. W.)

observations de coïncidence, les cylindres de verre de l'appareil étant en place et les joints bien graissés.

On fit alors un essai préliminaire sur la facilité avec laquelle on pouvait épuiser l'air de l'appareil. Une double pompe, mise en action continue pendant quinze minutes, réduisit la pression à 7 pouces. On n'essaya pas d'aller plus loin ; mais, dès qu'on eut arrêté l'action de la pompe, on reconnut bien vite qu'il devait exister une fuite, car l'éprouvette montait à raison d'environ 1 pouce en sept ou huit minutes. En interceptant la communication entre la pompe et l'appareil, on vit que la fuite était dans l'appareil. On fit alors rentrer l'air, et l'on examina les joints aussi bien que la boîte à cuirs traversée par la tige qui servait à mettre le pendule en mouvement. M. Newmann se déclara convaincu que la fuite ne pouvait exister que dans le métal du cylindre de fonte, quoique l'épaisseur en fût de 2 pouces. On remit à plus tard la recherche de cette fuite, et l'on prépara le pendule pour le lendemain, où l'on se proposait d'essayer ses oscillations comparativement dans l'air et dans un milieu aussi raréfié qu'on pourrait le conserver dans l'état d'imperfection de l'appareil.

Première expérience. — 29 juin. L'horloge de Molyneux retarde de $0^s,17$ par jour. Les cylindres de verre étant en place et tout étant préparé pour l'épuisement de l'air, mais la communication avec l'air extérieur restant établie par le tube, on a fait les observations suivantes des coincidences :

Numér. de la coïncid.	Baro-mètre.	Thermo-mètre (¹).	Coïncidence.	Amplitude.	Intervalle moyen.	Correction d'amplitude.	Réduction à 72°.	Oscillat. corrigées à 72°.
1.... 2.... 3....	po 29,91	° 70,6	h m s 9.29.45,17	° ′ 1.47				
					s 371,8	s +3,06	s −0,48	85937,62
15....		71,1	10.50.17,5	0.59,6				
					373,28	+0,87	−0,34	85937,45
31....	29,90	71,3	12.29.50,0	0.29,7				
	29,905	Index +0,066.	Réd. à 32° −0,111.			Bar. corrigé 29po,861		85937,54

(¹) Les températures sont toujours exprimées en degrés Fahrenheit.

Le baromètre employé dans toutes les expériences faites à Londres appartenait à M. Browne. Par plusieurs comparaisons avec les baromètres étalons de la Société Royale et de l'Observatoire Royal, faites à l'aide d'un baromètre transportable, on a trouvé qu'il fallait appliquer au baromètre de M. Browne une correction d'index de — 0^{p},066 pour faire concorder ses lectures avec celles des étalons corrigés de l'action capillaire. On a donc appliqué cette correction.

Dans ces expériences et dans toutes celles qui ont été faites ultérieurement à Londres et à Greenwich, l'amplitude des arcs a été obtenue de la manière suivante. On notait les traits de l'arc gradué devant lesquels s'arrêtait le même côté de l'appendice caudal du pendule à chaque extrémité de l'oscillation ; ces lectures donnaient l'arc total parcouru par le pendule, indépendamment de la position du zéro; la moitié est le demi-arc d'oscillation. On faisait alors les mêmes lectures pour l'autre côté de la queue du pendule; l'arc inscrit au tableau est la moyenne des deux demi-arcs. On obtient l'arc vrai en multipliant par 0,845.

L'expérience préliminaire dans l'air étant terminée, on arrêta le pendule à l'aide de la tige qui traverse la boîte à cuirs, et avec la même tige, on le remit en mouvement avec une amplitude plus grande que 1°47′, qui était celle des premières oscillations dans l'air dans l'expérience précédente. On épuisa alors l'air jusqu'à réduire la pression à 7 pouces. Le thermomètre, qui était à 71°,4 avant l'opération, descendit graduellement et s'arrêta à 70°,7 lorsque la pression atteignit 7 pouces. L'intervalle de deux coïncidences successives étant d'environ six minutes, et l'air qui rentrait par la fuite faisant monter l'éprouvette d'à peu près 1 pouce en six minutes, tandis qu'en manœuvrant doucement la pompe on pouvait aisément gagner 2 pouces dans le même temps, on ne fit travailler la pompe, pendant les douze premières coïncidences, que pendant un intervalle sur deux. De la douzième à la trente-neuvième coïncidence, on maintint l'éprouvette constamment à 7 pouces environ, par une manœuvre douce et continue de la pompe.

N° de la coïnc.	Ther-mo-mètre.	Éprou-vette.	Coïn-cidence.	Ampli-tude.	Inter-valle moyen.	Corr. d'ampli-tude.	Tempé-rature corrigée.	Réduc-tion à 72°.	Oscill. corrigées à 72°.
	°	po	h m s	° ′					
1.	70,8	7,00	1. 7.57	1.42					
2.		7,56	1.14.14						
3.		7,10	1.20.30,5						
4.		8,00	1.26.47	1.33					
5.	71,1	7,00	1.33. 3						
6.		8,10	1.39.20						
7.		7,00	1.45.37	1.27					
8.		8,00	1.51.54						
9.		6,70	1.58.10						
10.		7,90	2. 4.28		s 377,29	s +3,03	° 72,06	s +0,02	85944,85
11.	71,5	5,60	2.10.45						
12.		7,00	2.17. 3						
13.		7,00	2.23.21	1.14					
14.		7,00	2.29.38,5						
15.		7,00	2.35.56						
16.	71,6	7,00	2.42.13,5						
17.		7,10	2.48.31						
18.		7,10	2.54.50						
19.	71,8	7,10	»						
20.		7,00	3. 7.25,5	1. 3					
21.		6,90	»						
22.		6,90	3.20. 2						
23.		6,90	»						
24.	72,0	6,90	3.32.38,5						
25.		6,90	»						
26.		7,10	3.45.15,5	0.53					
27.		7,50	»						
28.		6,90	3.57.53						
29.		7,00	»						
30.	72,3	7,00	4.10.30		378,55	+1,11	72,94	+0,40	85944,85
31.		7,00	4.16.49						
32.		6,90	»						
33.		7,00	4.29.25,5	0.44					
34.		7,00	4.35.44,5						
35.		6,90	4.42. 3,5						
36.		7,00	»						
37.	72,5	7,00	4.54.41						
38.		7,00	»						
39.	72,6	7,00	5. 7.18	0.37					
		7,08	....						85944,85

Pendant la rentrée de l'air, le thermomètre monta de 72°,6 à 73°,8 et descendit ensuite graduellement jusqu'à ce qu'il eût pris la température de l'appartement, qui était un peu inférieure à 73°,5. Après un laps de temps d'une demi-heure, les observations suivantes furent commencées, les cylindres de verre restant en place, mais l'intérieur étant en communication avec l'air extérieur par le tube d'aspiration.

N° de la coïncid.	Thermomètre.	Baromètre.	Coïncidence.	Amplitude.	Intervalle moyen.	Correction d'amplitude.	Réduction à 72°.	Oscillat. corrigées à 72°.
	°	po	h m s	° ′	s	s	s	
1.	73,6	29,90	5.38.17	1.44	370,77	+3,06	−0,55	85937,57
12.	73,0	»	6.46.15,5	1.04	372,57	+1,11	−0,31	85937,44
26.	72,5	29,86	8.13.11,5	0.36				
	73,03	29,88	Index −0,066.	Réd. à 32° −0,117.		Bar. corr. 29″,829.		85937,40

Les cylindres de verre furent alors enlevés, et le pendule soulevé sur les fourchettes ; on a constaté dans cette opération que le pendule n'avait pas quitté sa place durant les expériences, pendant lesquelles il avait été mis deux fois en mouvement et arrêté deux fois par la tige qui traverse la boîte à cuirs.

Les oscillations dans l'air, avant et après les expériences dans l'air raréfié, ont donc donné les résultats suivants :

		Baromètre.
		po
Dans la matinée, avant l'oscillation dans le milieu raréfié............	85937,54	29,861
Dans la soirée, après l'oscillation dans le milieu raréfié...........	85937,40	29,829
Moyenne................	85937,47	29,845

		Éprouvette.
		po
Oscillations dans le milieu raréfié, réduites à la même température que les oscillations dans l'air ...	85944,85	7,08

D'où ressort, comme résultat de cette expérience, une différence de 7,38 oscillations par jour, correspondant à une différence de pression atmosphérique de 22,765 pouces ; la température de l'air en pleine pression étant 72°,01 et celle de l'air raréfié 72°,5.

Les indications du thermomètre dans le milieu raréfié ont été

augmentées de 0°,7, pour compenser l'effet produit sur le thermomètre lorsqu'il a été soustrait à l'action de la pression de l'atmosphère. On a observé que, quand la pompe marchait, le thermomètre, qui, antérieurement marquait 71°,4, était tombé à 70°,7, quand la pression était réduite à 7 pouces. L'effet inverse eut lieu au moment de la rentrée de l'air. Pour s'assurer s'il est exact d'attribuer cet effet à ce que la pression de l'atmosphère cessait de s'exercer sur l'extérieur du réservoir et du tube du thermomètre, on fit les expériences suivantes. Le thermomètre fut plongé dans de la glace pilée et placé sur la platine d'une pompe à air; le mercure coïncidait exactement avec la division 32°; le tout fut ensuite recouvert d'une cloche, et l'on fit le vide. Le thermomètre descendit aussitôt que la pompe fut mise en marche; et quand l'éprouvette indiqua une pression d'un demi-pouce, le mercure resta à 31°,25; la rentrée de l'air le fit immédiatement remonter à 32°. L'expérience fut répétée plusieurs fois avec les mêmes résultats. En observant attentivement les indications simultanées du thermomètre et celles de l'éprouvette, on trouva les corrections suivantes du thermomètre pour différentes pressions : pour le vide presque parfait + 0°,75; pour 7 pouces et les pressions voisines + 0°,70; pour 15 pouces et aux environs + 0°,5, et pour 20 pouces + 0°,4. La nécessité de ces corrections a été confirmée plus tard, dans les expériences faites à Greenwich avec le même appareil, qui seront rapportées plus loin. On enregistrait simultanément les indications du thermomètre qui avait été vérifié dans la glace fondante, et celles de deux autres thermomètres enfermés dans un cylindre en verre, qui avait été hermétiquement clos sous le récipient de la pompe à air, après que l'air en eut été extrait. Le cylindre renfermant ces thermomètres étant suspendu dans l'appareil à côté du thermomètre étalon, les thermomètres qu'il contenait n'éprouvèrent aucun changement lorsqu'on fit le vide dans l'appareil; tandis que le thermomètre étalon tombait d'une quantité correspondante aux corrections ci-dessus indiquées, et restait constamment plus bas que les autres de la même quantité, jusqu'à ce que la rentrée de l'air rétablît l'accord entre les indications des trois thermomètres (¹).

(¹) En soumettant à la même épreuve un thermomètre dont la boule avait un

Il ressort donc de l'expérience du 29 juin une différence de 7,38 oscillations pour une différence de pression atmosphérique de l'air à 72°, mesurée par 22,765 pouces de mercure à 32°. Ce qui équivaut à une réduction au vide de 9,725 oscillations par jour, les oscillations ayant lieu dans l'air à 72°, sous une pression de 30 pouces.

Le poids spécifique du pendule est d'environ 8,6 ; le poids de l'eau est à celui de l'air, sous une pression barométrique de 29,27 pouces et à 53° du thermomètre, dans le rapport de 836 à 1, et la dilatation de l'air pour chaque degré du thermomètre est $\frac{1}{480}$ de son volume ; la correction due à la perte de poids dans l'air à 72° sous la pression de 30 pouces est donc de 5,88 oscillations. La différence, ou 3,845 oscillations par jour, est la quantité dont la réduction expérimentale au vide surpasse la réduction calculée par les formules ordinaires.

L'état imparfait de l'appareil dans cette première expérience pourrait faire concevoir des doutes sur l'exactitude du résultat à deux points de vue ; on pourrait supposer : 1° que l'extraction de l'air ayant eu lieu continuellement, pendant que le pendule oscillait dans le milieu raréfié, afin de contre-balancer l'effet de la fuite d'air, il a pu en résulter des courants qui ont influencé la durée de l'oscillation ; et 2° que les montants en fer qui supportent le pendule n'ayant pas suffisamment de pied pour détruire la force latérale à laquelle l'oscillation donne naissance, et le point de suspension partageant en conséquence cette oscillation, la durée de l'oscillation en est inégalement affectée dans l'air et dans le milieu raréfié. Par des expériences faites avec le même pendule le 8 et le 9 juin, dont il a déjà été rendu compte à la Société [*Phil. Trans.*, 1829, art. IX (¹)] et dans lesquelles le pendule était suspendu dans la même salle au support original en acajou du capitaine Kater, on a trouvé que les oscillations sur un support inébranlable, toutes les autres circonstances étant les mêmes, excèdent

diamètre de grandeur inusitée, et était plongée dans la glace pilée, on constata que la soustraction de la pression atmosphérique produisait dans la hauteur du mercure au point de la glace fondante une différence d'un degré entier de l'échelle.

(¹) Ce sont les expériences faites pour déterminer la différence des nombres d'oscillations exécutées par un pendule invariable à Greenwich et à Londres, dans la maison où Kater avait fait ses expériences.

celles qui se font sur la plaque de notre appareil d'environ 18 oscillations par jour ; différence qui est due, sans aucun doute, au mouvement de la plaque pendant l'oscillation, par suite de l'élasticité des montants en fer et de l'insuffisance de leur écartement à la base. Pour donner plus de stabilité à la suspension dans la seconde expérience, on intercala verticalement des planches de chêne bien sec, d'un pouce d'épaisseur, qui reposaient par la partie inférieure sur l'intérieur du cylindre de fonte supportant les cylindres de verre, et l'on vissa fortement la plaque de suspension sur le haut de ces planches par des vis qui s'engageaient dans les montants en fer. De cette façon, la plaque de suspension était reliée directement et solidement avec le cylindre de base par les planches, indépendamment des montants en fer; des ouvertures convenablement percées dans les planches permettaient l'observation des coïncidences.

Pour découvrir le point où la fuite avait lieu, on remplit d'eau l'intérieur de l'appareil jusqu'au bord du cylindre inférieur, et, la communication étant établie entre le tuyau d'épuisement et la partie supérieure de la boîte, on fit le vide. On vit aussitôt des bulles d'air monter rapidement de la surface intérieure du cylindre de fonte, particulièrement des parties qui étaient en face des nervures extérieures, où le métal était plus épais. On enduisit fortement les parties poreuses de la fonte d'un ciment de fer, composé de limaille de fonte de fer et de blanc de céruse, et l'on appliqua plusieurs couches de peinture à l'huile, aussi bien au dehors qu'au dedans du cylindre. Après ces modifications, on remonta de nouveau l'appareil en face du pendule pour une seconde expérience.

Deuxième expérience, juillet 13. — La pendule Molyneux retarde de $0^s,2$ par jour. Ce jour-là, la disposition des appareils était celle de la première expérience, à l'exception des changements ci-dessus, et à cela près que la lunette servant à l'observation des coïncidences avait été rapprochée du pendule, dont elle se trouvait éloignée de 11 pieds. Le diaphragme et l'arc gradué étaient placés dans l'intérieur de la cage de verre, au lieu d'être entre cette cage et la pendule. L'arc gradué était à 48 pouces audessous du point de suspension; par suite, l'arc lu devait être multiplié par 0,87 pour donner l'arc réel.

L'oscillation dans l'air a d'abord donné les résultats suivants :

Nº de la coïncid.	Thermomètre.	Baromètre.	Coïncidence.	Amplitude.	Intervalle moyen.	Correction d'amplitude.	Réduction à 70°.	Oscillat. corrigées à 70°.
	°	po	h m s	° ′				
1.	70,0	29,43	0.58. 8,5	1.22	382,12 s	−1,40 s	−0,10 s	85950,86
22.	69,5	29,46	3.11.53,0	0.32				
	69,75	29,445	Index − 0,066. Réd. à 32° − 0,107. Bar. corr. 29,404					85950,86

On épuisa l'air et l'on fit les observations suivantes :

Nº de la coïncid.	Éprouvette.	Thermomètre.	Coïncidence.	Amplitude.	Intervalle moyen.	Correction d'amplitude.	Réduction à 70°.	Oscillat. corrigées à 70°.
	po	°	h m s	° ′				
1.	1,50	68,8	4.18.34,5	1.28				
19.	1,70	69,0	6.15.18	1. 4	389,73 s	−1,73 s	−0,25 s	85959,88
32.	1,75	68,8	7.39.46	0.55				
59.	1,80	68,0	10.35.29	0.38	391,52	+0,24	−0,71	85959,95
149.	1,80	67,1	20.22.46	0.10				
	1,71	68,34 + 0,75 = 69,09						85959,915

On fit alors rentrer l'air, et, dans l'après-midi du 14 juillet, on fit les observations suivantes :

Nº de la coïncid.	Thermomètre.	Baromètre.	Coïncidence.	Amplitude.	Intervalle moyen.	Correction d'amplitude.	Réduction à 70°.	Oscillat. corrigées à 70°.
	°	po	h m s	° ′				
1.	69,9	29,50	2.45.33,5	1.08	382,52 s	+0,95 s	−0,15 s	85950,84
22.	69,4	29,50	4.59.26,5	0.26				
	69,65	29,50	Index + 0,066. Réd. à 32° − 0,107. Bar. corr. 29,459.					85950,84

Les oscillations observées dans cette expérience donnent les résultats suivants :

		Baromètre.
		po
Juillet 13. Antérieurement à l'oscillation dans le milieu raréfié.....	85950,86	29,404
Juillet 14. Après l'oscillation dans le milieu raréfié..............	85950,84	29,459
Moyenne..................	85950,85	29,431
		Éprouvette.
		po
Oscillations dans le milieu raréfié, réduites à la même température que celles dans l'air.............	85959,915	1,71

D'où ressort, comme résultat de cette expérience, une différence de 9,065 oscillations par jour, correspondante à une différence de pression atmosphérique de 27,721 pouces, la température de l'air en pleine pression étant 69°,7 et celle du milieu raréfié 69°,09. On déduit de là, pour la réduction au vide de l'oscillation exécutée dans l'air à cette température et sous la pression de 30 pouces, une correction de 9,81 oscillations par jour. La correction, calculée d'après la perte de poids dans l'air, est 5,92 oscillations.

Le ciment et la peinture avaient agi efficacement pour empêcher toute fuite; de 10^h30^m dans la soirée du 13 à 8^h30^m le lendemain matin, comme le montre le Tableau, et ensuite jusqu'à 1^h après midi du même jour, quand le pendule était encore en mouvement, mais n'avait qu'une amplitude trop petite pour permettre l'observation des coïncidences, l'éprouvette marqua constamment $1^{po},8$ sans changement perceptible. L'introduction des planches de chêne a aussi contribué à la fixité de la plaque de suspension, l'excès d'oscillations sur un support immobile étant réduit, de 18 oscillations par jour qu'il était dans la précédente expérience, à $5\frac{1}{2}$ dans la présente. En même temps, l'accord des réductions au vide obtenues dans les deux expériences nous met en droit de conclure, que le rapport du nombre des oscillations dans l'air à pression entière et dans l'air raréfié n'est pas sensiblement affecté par un petit mouvement du support.

On doit donc considérer maintenant comme établi par l'expérience, que la vraie réduction au vide est considérablement plus grande qu'on ne la suppose habituellement; pour le pendule invariable, par exemple, elle doit être augmentée dans le rapport de 3 à 5. Il devient également évident que tous les pendules en général, employés dans l'air, et destinés à donner des résultats indépendants du retard variable occasionné par leur oscillation dans l'air, exigent que l'influence de l'air sur leurs oscillations respectives soit constatée par expérience, puisqu'il n'est pas possible de la déterminer par le calcul. Or, comme l'appareil est, par sa construction, propre à fournir cet élément avec facilité et exactitude, pour toutes les formes de pendules qui ont été employés jusqu'ici, qu'ils servent à déterminer la longueur absolue ou seulement les longueurs relatives, il semble que cet appareil pourrait devenir, à l'occasion, d'un usage général et servir à

autre chose qu'à déterminer la réduction au vide d'un pendule invariable.

On a donc jugé convenable de transporter l'appareil à l'Observatoire royal de Greenwich et de l'y installer, pour qu'il soit mis à la disposition des personnes qui auraient à en faire usage, après qu'elles en auraient adressé la demande au Bureau des Longitudes, aux frais duquel il a été construit. On mit de côté la plaque de suspension en fer avec les montants de fer qui la supportaient; et l'on y substitua la plaque en métal des cloches avec sa couronne métallique, telle qu'elle est figurée (*Pl. I*), ainsi que la charpente en fer et les vis que représente une autre figure de cette même planche, et à l'aide desquelles le support du pendule peut être fixé invariablement de la manière précédemment décrite. Une horloge de Dent, munie d'un balancier à mercure portant un disque de papier blanc, fut placée dans l'angle derrière l'appareil; et la lunette pour l'observation des coïncidences fut installée en avant, à 16 pieds environ du pendule mis en place. On fit, en outre, les dispositions nécessaires pour permettre d'observer les coïncidences à l'aide d'une lumière artificielle, sans que la chaleur de celle-ci troublât la température de la salle. A cet effet, la lumière d'une lampe d'Argand, placée dans une chambre voisine, arrivait sur le disque du balancier en traversant un tube de fer-blanc, qui évitait la diffusion de la lumière dans la salle d'observation. Le diaphragme était placé entre l'appareil et l'horloge, et l'arc gradué dans l'intérieur de la cage en verre, tout près du pendule. Cet arc était gradué en pouces et dixièmes de pouce, et l'on pouvait lire jusqu'aux centièmes; comme il croisait le pendule à $47^{po},7$ au-dessous du point de suspension, les divisions lues devaient être multipliées par 1,2 pour donner l'arc en degrés et parties du degré. Outre l'éprouvette à mercure, un baromètre à mercure était suspendu dans la cage de verre; la cuvette de ce baromètre avait une capacité suffisante pour recevoir au besoin la totalité du mercure contenu dans le tube. Pour un pouce d'abaissement du mercure dans le tube, le niveau dans la cuvette s'élevait de $\frac{1}{112}$ de pouce. L'échelle était tracée en traits rouges sur le tube de verre. La course de l'éprouvette ne dépassant pas 10 pouces, le baromètre était nécessaire pour mesurer les pressions comprises entre 10 pouces et la pression entière de l'atmosphère. En le

comparant, lorsqu'il était suspendu en place, avec le baromètre étalon de l'Observatoire, on trouva que ses indications, aux environs de 30 pouces, exigeaient une correction additive de $0^{po},32$, le baromètre étalon étant corrigé pour l'action capillaire, tandis que le baromètre de l'appareil ne pouvait l'être, parce qu'on ne connaissait pas assez exactement son diamètre intérieur. On fit alors un vide partiel dans l'appareil jusqu'à ce que l'éprouvette commençât à donner des indications, et l'on trouva que, correction faite de l'élévation du niveau dans la cuvette, le baromètre exigeait encore une correction de $0^{po},41$ pour rendre ses indications concordantes avec celles des deux branches de l'éprouvette, que l'on observa dans toute l'étendue de son échelle. Le baromètre n'étant employé que pour les pressions voisines de 14 pouces, on appliqua aux lectures une correction additive de $\frac{0,32+0,41}{2} = 0,36$, grâce à laquelle on peut croire qu'elles deviennent comparables aux indications de l'éprouvette et du baromètre étalon. Les deux thermomètres, enfermés dans une enveloppe de verre scellée à la lampe après qu'on y avait fait le vide, étaient suspendus à côté du thermomètre étalon ; ils sont désignés dans les Tableaux suivants par les n°s 2 et 3 ; l'étalon par le n° 1; et un thermomètre extérieur, suspendu à l'air libre auprès de l'appareil et au même niveau que les thermomètres intérieurs, par le n° 4.

Par suite de mon absence d'Angleterre [1], les expériences sur le pendule invariable dans l'appareil furent suspendues jusqu'en janvier de la présente année, où elles furent reprises avec la précieuse coopération de M. Thomas Glanville Taylor, de l'Observatoire royal, dont les observations sont désignées par son nom dans les pages qui suivent. Le pendule invariable n° 12 étant à cette époque employé à d'autres déterminations, j'obtins la permission de faire usage, pour mes expériences actuelles, d'un pendule semblable, le n° 13, destiné éventuellement à l'Observatoire de Bruxelles.

La disposition des observations dans toutes les expériences successives a été celle que j'ai déjà décrite ; on faisait osciller le

---

[1] En septembre et octobre 1828, Sabine observa à Altona les oscillations du pendule invariable n° 12. (C. W.)

pendule d'abord dans l'air, puis dans le milieu raréfié, puis de nouveau dans l'air sous pression entière. On prenait la moyenne des deux séries dans l'air, et l'on comparait à cette moyenne l'oscillation intermédiaire dans le milieu raréfié. Le résultat de la comparaison était ainsi entièrement indépendant de la marche diurne de l'horloge, et aussi, dans une certaine mesure, de l'irrégularité de sa marche dans des intervalles moindres que vingt-quatre heures. L'horloge était comparée chaque jour à l'horloge de l'instrument des passages de l'Observatoire. Mais, comme le temps dans la deuxième moitié de janvier et la première de février a été rarement clair, et que la marche de l'horloge méridienne a été plus irrégulière qu'elle ne l'est d'habitude, il a paru préférable de prendre une marche moyenne pour l'horloge des coïncidences pendant les mois de janvier et de février; il en résulte sans doute que ses écarts en dehors de cette marche moyenne pendant les jours d'expériences se reportent en apparence sur la marche du pendule à des jours différents; mais cette irrégularité apparente est absolument sans conséquence, relativement au but de nos expériences, pour lequel il suffit d'avoir le rapport des oscillations du pendule dans les trois séries de coïncidences qui composent chaque expérience distincte.

Expérience III.

Greenwich, janvier 14 et 15. — L'horloge avance de $4^m 14^s,38$.

Observateur Sabine.

Nos de la coïnc.	Thermomètres. 1.	2.	3.	4.	Bar. étalon.	Coïncid.	Ampl.	Interv. moyen.	Corr. d'ampl.	Réd. à 36°.	Oscill. corrigées à 36°.
	°	°	°	°	po						
1.	»	»	»	»	»	h m s	° ′				
2.	35,4	»	»	35,7	29,93	11. 9.12,83	0,83				
3.	»	»	»	»	»						
12.	35,6	»	»	35,6	»			s 491,76	s +0,74	s −0,20	86034,60
20.	»	»	»	»	»						
21.	»	»	»	»	»						
22.	35,6	»	»	35,7	29,90	1.54. 7, 9	0,53				
23.	»	»	»	»	»						
24.	»	»	»	»	»						
	35,53				29,915						86034,60

Capill. +0po,019. Réd. à 32° −0,017. Bar. corr. 29po,917.

On fit ensuite le vide, le pendule fut mis en mouvement, et on le laissa osciller pendant une heure avant de commencer les lectures :

Observateur Sabine, puis Taylor.

Nos de la coïnc.	Thermomètres. 1.	2.	3.	4.	Éprouvette.	Coïncid.	Ampl.	Interv. moy.	Corr. d'ampl.	Réduct. à 36°.	Oscill. corrigées à 36°.
	°	°	°	°	po	h m s	°	s	s	s	
1.	35,5	36,4	36,6	36,7	1,56						
2.	»	»	»	»	»						
3.	»	»	»	»	»	3.47.13,62	1,04				
4.	»	»	»	»	»						
5.	36,0	36,7	36,9	36,7	1,69			507,3	+1,33	+0,23	86314,3
										Éprouvette.	1,88
17.	35,8	36,4	36,7	36,3	2,10						
18.	»	»	»	»	»						
19.	»	»	»	»	»	6. 2.30,43	0,76				
20.	»	»	»	»	»						
21.	35,9	36,5	36,8	36,6	2,17			507,6	+0,64	+0,26	86313,84
										Éprouvette.	2,395
36.	35,8	36,4	36,6	36,5	2,62						
37.	»	»	»	»	»						
38.	»	»	»	»	»	8.43.14,73	0,50				
39.	»	»	»	»	»						
40.	36,0	36,6	36,9	36,8	2,69			508,0	+0,25	+0,19	86313,65
										Éprouvette.	2,88
60.	»	»	»	»	3,10						
61.	35,5	36,2	36,3	36,2	»	11.57.58,67	0,29				
62.	»	»	»	»	3,12						
	35,75 + 0,75 = 36,50				2,38						86313,93

On fit ensuite rentrer l'air, et les observations suivantes furent faites le lendemain matin :

Observateur Taylor.

Nos de la coïnc.	Thermomètres. 1.	2.	3.	4.	Bar. étalon.	Coïncid.	Ampl.	Interv. moyen.	Corr. d'ampl.	Réd. à 36°.	Oscill. corrigées à 36°.
	°	°	°	°	po	h m s	°	s	s	s	
1.	»	»	»	»	»						
2.	36,1	36,2	36,2	36,4	29,76	0.15.19	0,81				
3.	»	»	»	»	»			494,22	+0,36	+0,10	86304,18
27.	»	»	»	»	»						
28.	36,4	»	»	36,5	29,76	3.49.28,83	0,20				
29.	»	»	»	»	»						
	36,25				29,76						86304,18

Capill. +0,019. Réd. à 32° — 0,018. Bar. corr. 29,761.

Les résultats de la troisième expérience sont les suivants :

		Baromètre.
Janvier 14. Antérieurement à l'oscillation dans le milieu raréfié......	86304,60	po 29,917
Janvier 15. Après l'oscillation dans le milieu raréfié................	86304,18	29,761
Moyenne................	86304,39	29,839
		Éprouvette.
Oscillations dans le milieu raréfié ramenées à la même température que celles dans l'air..................	86313,93	po 2,38

D'où ressort, comme résultat de cette expérience, qu'une différence de 9,54 oscillations par jour correspond à une différence de pression atmosphérique de 27,459 pouces de mercure à 32°, la température de l'air en pleine pression étant 35°,89 et celle de l'air raréfié 36°,5.

La rentrée presque imperceptible de l'air qui s'est manifestée dans cette expérience et dans la suivante fut attribuée à la rigueur de la température, qui avait durci l'enduit graisseux et l'empêchait d'assurer les joints des cylindres aussi bien que d'habitude. On a reconnu plus tard l'exactitude de cette explication.

Expérience IV.

Janvier 17 et 18. — L'horloge avance de $4^m 14^s,38$ par jour.

Observateur Sabine.

Nos de la coïnc.	Thermomètres. 1.	2.	3.	4.	Bar. étalon.	Coïncid.	Ampl.	Interv. moyen.	Corr. de l'arc.	Réduct. à 36°.	Oscill. corrigées à 36°.
	°	°	°	°	po	h m s	°	s	s	s	
1.	»	»	»	»	»						
2.	32,3	32,2	32,4	32,4	29,65	11.24.44,67	0,94				
3.	»	»	»	»	»			496,08	+2,64	−1,54	86304,13
19.	»	»	»	»	»						
20.	32,4	32,3	32,5	32,4	29,66	1.53.34	0,35				
21.	»	»	»	»	»						
	32,35				29,655						86304,13

Capill. +0,019. Réd. à 32° — 0,004. Bar. corr. 29,670.

L'air fut ensuite enlevé, et l'on fit les observations suivantes; les soupapes de la pompe ayant besoin d'être réparées, l'éprouvette ne put être amenée plus bas que 3 pouces :

Observateur Sabine, puis Taylor.

Nos de la coïnc.	Thermomètres. 1.	2.	3.	4.	Éprouvette.	Coïncid.	Arc lu et arc vrai.	Interv. moy.	Corr. d'ampl.	Réduct. à 36°.	Oscill. réduites à 36°.
	o	o	o	o	po	h m s	o	s	s	s	
1.	»	»	»	»	»						
2.	31,7	32,3	32,5	32,6	3,09	3.16.10,17	1,02				
3.	»	»	»	»	»						
								508,55	+1,14	−1,47	86313,25
										Éprouvette.	3,29
20.	»	»	»	»	»						
21.	31,8	32,2	32,4	32,4	3,48	5.57.12,83	0,66				
22.	»	»	»	»	»						
								509,64	+0,34	−1,49	86313,16
										Éprouvette.	3,84
60.	»	»	»	»	»						
61.	31,6	32,2	32,2	32,4	4,19	11.36.58,33	0,28				
62.	»	»	»	»	»						
	31,7 + 0,75 = 32,45				3,59						86313,20

On fit alors rentrer l'air, et les observations suivantes furent faites le lendemain matin :

Observateur Taylor.

Nos de la coïnc.	Thermomètres. 1.	2.	3.	4.	Bar. étalon.	Coïncid.	Ampl.	Interv. moyen.	Corr. d'ampl.	Réduct. à 36°.	Oscill. corrigées à 36°.
	o	o	o	o	po	h m s	o	s	s	s	
1.	»	»	»	»	»						
2.	32,8	33,0	33,0	31,8	29,69	23.14.47,33	0,91				
3.	»	»	»	»	»						
								495,92	+0,55	−1,52	86303,94
23.	»	»	»	»	»						
24.	32,0	32,1	32,2	32,3	29,85	2.16.37, 5	0,30				
25.	»	»	»	»	»						
	32,4				29,77						86303,94

Capill. +0,019. Réd. à 32° − 0,002. Bar. corr. 29,787.

Cette expérience a donné les résultats suivants pour les oscillations dans l'air et dans le milieu raréfié :

		Baromètre.
		po
Janvier 17. Antérieurement à l'oscillation dans le milieu raréfié......	86304,13	29,670
Janvier 18. Après l'oscillation dans le milieu raréfié....................	86303,94	29,787
Moyenne................	86304,03	29,728

		Éprouvette.
		po
Oscillations dans le milieu raréfié ramenées à la même température que celles dans l'air..............	86313,20	3,59

D'où le résultat, qu'une différence de 9.17 oscillations par jour correspond à une différence de pression atmosphérique de 26,138 pouces de mercure à 32°, la température de l'air en pleine pression étant 32°,37, et celle de l'air raréfié 32°,45.

Expérience V.

Janvier 30 et 31. — L'horloge avance de $4^m 14^s,38$ par jour.

Observateur Sabine.

Nos de la coinc.	Thermomètres. 1.	2.	3.	4.	Bar. étalon.	Coïncid.	Ampl.	Interv. moyen.	Corr. d'ampl.	Réduct. à 36°.	Oscill. corrigées à 36°.
	°	°	°	°	po	h m s	°	s	s	s	
1.	»	»	»	»	»						
2.	36,0	»	»	36,1	29,44	11. 3.40,67	1,06				
3.	»	»	»	»	»			496,35	+0,68	+0,08	86305,97
25.	»	»	»	»	»						
26.	36,4	»	»	36,4	29,50	2.22.13,17	0,30				
27.	»	»	»	»	»						
	36,2				29,47						86305,97

Capill. +0,019. Réd. à 32° — 0,015. Bar. corr. 29,474.

L'air fut ensuite extrait, et l'on fit les observations suivantes. La pompe à air avait été réparée, mais 0,6 pouce était la limite à laquelle elle pouvait amener l'épuisement de l'air. La rentrée de l'air dans l'appareil n'a pas excédé $\frac{7}{100}$ de pouce dans les dix-huit heures qu'ont duré les expériences :

Observateurs Sabine et Taylor.

Nos de la coïnc.	Thermomètres. 1.	2.	3.	4.	Éprouvette.	Coïncid.	Ampl.	Interv. moy.	Corr. de l'arc.	Réduct. à 36°.	Corr. d'oscill. à 36°.
	o	o	o	o	po	h m s	o	s	s	s	
1.	»	»	»	»	»						
2.	35,9	36,6	36,7	37,4	0,63	3.22.53,33	1,09				
3.	»	»	»	»	»			510,42	+1,00	+0,27	86316,11
62.	»	»	»	»	»						Éprouvette. 0,63
63.	35,9	36,4	36,5	37,3	0,63	12. 1.49,17	0,50				
64.	»	»	»	»	»						
127.	»	»	»	»	»			512,08	+0,18	+0,19	86316,31
128.	35,5	36,4	36,5	36,6	0,70	21.16.34,17	0,20				Éprouvette. 0,665
129.	»	»	»	»	»						
	35,77 +0,75 = 36,52				0,653						86316,21

L'air fut ensuite réintroduit, et l'on fit les observations suivantes :

Observateurs Taylor et Sabine.

Nos de la coïnc.	Thermomètres. 1.	2.	3.	4.	Bar. étalon.	Coïncid.	Ampl.	Interv. moyen.	Corr. d'ampl.	Réduct. à 36°.	Oscill. corrigées à 36°.
	o	o	o	o	po	h m s	o	s	s	s	
1.	»	»	»	»	»						
2.	36,7	36,6	36,7	36,7	30,03	22. 1.50,83	0,96				
3.	»	»	»	»	»						
26.	»	»	»	»	»			496,00	+0,49	+0,25	86305,69
27.	»	»	»	»	»						
28.	36,5	36,5	36,6	36,5	30,07	1.36.46,5	0,22				
29.	»	»	»	»	»						
30.	»	»	»	»	»						
	36,6				30,05						86305,69

Capill. +0,019. Réd. à 32° — 0,018. Bar. corr. 30,051.

Cette expérience a donné les résultats suivants :

		Baromètre.
Janvier 30. Antérieurement à l'oscillation dans le milieu raréfié.......	86305,97	po 29,474
Janvier 31. Après l'oscillation dans le milieu raréfié..................	86305,69	30,051
Moyenne................	86305,83	29,762
		Éprouvette.
Oscillations dans le milieu raréfié ramenées à la même température que celles dans l'air..................	86316,21	po 0,653

D'où ressort, comme résultat de cette expérience, une différence de 10,38 oscillations par jour, correspondant à une différence de la pression de l'atmosphère de 29,109 pouces de mercure à 32°, la température de l'air en pleine pression étant 36°,4 et celle de l'air raréfié 36°,52.

Expérience VI.

Janvier 31 (suite). — L'horloge avance par jour de 4m14s,38.

Aussitôt après que cette dernière observation dans l'air fut achevée, on fit le vide jusqu'à ce que le baromètre indiquât une pression d'à peu près une demi-atmosphère.

On fit alors les observations suivantes :

Observateurs Sabine et Taylor.

Nos de la coïnc.	Thermomètres. 1.	2.	3.	4.	Bar. étalon.	Coïncid.	Ampl.	Interv. moyen.	Corr. d'ampl.	Réduct. à 36°.	Oscill. corrigées à 36°.
	°	°	°	°	po	h m s	°				
1.	»	»	»	»	»						
2.	37,0	37,6	37,8	37,0	13,90	3. 4.36,00	1,09				
3.	»	»	»	»	»						
	36,0	36,5	36,8	35,7	»			s 504,186	s +0,43	s +0,26	86311,35
62.	»	»	»	»	»						
63.	35,4	36,0	36,0	34,6	13,91	11.37.11,33	0,114				
64.	»	»	»	»	»						
	36,13 − 0,5 = 36,63				13,905						86311,35

Cuvette −0,144. Index −0,360. Réd. à 32 −0,005. Bar. corr. 14,116.

L'air fut ensuite réintroduit; et le jour suivant, 1[er] février, on fit les observations suivantes :

Observateurs Sabine et Taylor.

Nos de la coïnc.	Thermomètres. 1.	2.	3.	Bar. étalon. 4.	Coïncid.	Ampl.	Interv. moyen.	Corr. d'ampl.	Réduct. à 36°.	Oscill. corrigée à 36°.
	o	o	o	o	po	h m s	o	s	s	s	
1.	»	»	»	»	»						
2.	34,7	»	»	35,2	30,32	22.45.36,83	1,07	496,67	+0,69	−0,53	86305,6[?]
3.	»	»	»	»	»						
23.	»	»	»	»	»						
24.	34,8	»	»	34,8	30,35	1.47.43,5	0,30				
25.	»	»	»	»	»						
	34,75				30,335						86305,6[?]

Capill. +0,019. Réd. à 32° — 0,012. Bar. corr. 30,342.

Cette expérience a donné les résultats suivants :

		Baromètre.
		po
Janvier 31. Antérieurement à l'oscillation dans le milieu raréfié.......	86305,69	30,051
Février 1. Après l'oscillation dans le milieu raréfié.................	86305,60	30,342
Moyenne.................	86305,645	30,196
Oscillations dans le milieu raréfié ramenées à la même température que celles dans l'air..................	86311,35	14,116

D'où ressort, comme résultat de cette expérience, une différence de 5,705 oscillations par jour, correspondant à une différence de la pression de l'atmosphère de 16,08 pouces de mercure à 32°, la température de l'air en pleine pression étant 35°,67 et celle du milieu raréfié 36°,63.

Expérience VII.

Février 9 et 10. — L'horloge avance par jour de 4[m] 14[s],38.

Cette expérience fut entreprise dans un but spécial : celui de déterminer le retard comparatif d'un pendule oscillant dans une

atmosphère de gaz hydrogène et dans une atmosphère d'air ordinaire.

M. William Hasledyne Pepys m'avait suggéré l'idée que l'on remplirait la condition de faire osciller un pendule dans le vide mieux que ne l'avait permis l'emploi de la pompe à air, en remplissant l'appareil de gaz hydrogène, et faisant ensuite le vide aussi loin que le permettrait le procédé d'épuisement. La petite quantité de gaz restant dans l'appareil, étant treize fois plus légère que l'air qui ferait monter l'éprouvette au même point, on devait s'attendre à ce que son influence sur les oscillations serait diminuée dans le rapport des poids spécifiques de l'air et de l'hydrogène.

L'objet de cette expérience était en conséquence de s'assurer si les retards produits par l'air et par l'hydrogène étaient bien dans ce rapport ; et l'on y arriva en faisant osciller le pendule d'abord dans l'air ordinaire, puis dans une atmosphère de gaz hydrogène sous une pression égale, ou du moins aussi égale que les circonstances le permettaient.

Première expérience, dans l'air :

Observateur Sabine.

N°s de la coïnc.	Therm. 1.	Therm. 4.	Bar. étalon.	Coïncidence.	Ampl.	Intervalle moyen.	Corr. de l'arc.	Réduction à 36°.	Oscill. corrigées à 36°.
	°	°	po	h m s	°	s	s	s	
1..	»	»	»						
2..	37,7	37,8	30,200	21.23. 5,17	1,02				
3..	»	»	»			494,745	+0,61	+0,88	86305,57
22..	»	»	»						
23..	38,5	38,5	30,156	0.16.14,83	0,28				
24..	»	»	»						
	38,1		30,193 Capill. +0,019. Réd. à 32° − 0,019; = 30,193.						86305,57

L'air fut alors extrait jusqu'à ce que l'éprouvette indiquât $0^{po},7$; et le gaz hydrogène fut introduit, après avoir passé dans un cylindre contenant du muriate de chaux, jusqu'à ce que le mercure dans le baromètre montât à 30 pouces. Le gaz fut ensuite pompé jusqu'à ce que l'éprouvette indiquât 1,4 pouce.

On fit entrer alors une nouvelle provision de gaz à travers le

cylindre contenant du muriate de chaux frais, jusqu'à ce que la pression dans l'appareil excédât à peu près de 0,2 pouce la pression de l'atmosphère à l'extérieur. On rétablit l'équilibre de pression, en laissant sortir la petite portion de gaz nécessaire. Le mercure dans le baromètre renfermé resta à 29,95, correspondant à l'indication du baromètre étalon de 30,24 pouces à 32°. On fit ensuite les observations suivantes :

Observateurs Sabine et Taylor.

Nos de la coïnc.	Therm. l.	Therm. i.	Barom. renfermé.	Coïncidence.	Ampl.	Intervalle moyen.	Corr. de l'arc.	Réduction à 36°.	Oscillat. corrigées à 36°.
	°	°	po	h m s	°	s	s	s	
1..	»	»	»						
2..	40,0	40,0	29,95	8.30.56,50	1,15				
3..	»	»	»			505,03	+1,11	+1,60	86313,93
35..	»	»	»						
36..	39,6	39,7	29,90	13.17. 7,67	0,53				
37..	»	»	»						
	39,8		29,925	Index. +0,32. Réd. à 32° − 0,03; = 30,215					86313,93

L'appareil fut abandonné, pendant la nuit, rempli du gaz ; le lendemain matin, on donna une nouvelle impulsion au pendule et l'on répéta les observations :

Observateurs Taylor et Sabine.

Nos de la coïnc.	Therm. l.	Therm. 4.	Barom. intérieur.	Coïncidence.	Ampl.	Intervalle moyen.	Corr. d'ampl.	Réduction à 36°.	Oscillat. corrigées à 36°.
	°	°	po	h m s	°	s	s	s	
1..	»	»	»						
2..	38,8	38,8	29,88	0. 3.18	1,03				
3..	»	»	»						
35..	»	»	»			506,64	+0,73	+1,20	86314,24
36..	»	»	»						
37..	38,9	39,0	29,87	4.58.50,5	0,36				
38..	»	»	»						
39..	»	»	»						
	38,85		29,875	Index +0,32. Réd. à 32° − 0,025. Bar. corr. 30,17					86314,24

On obtint donc dans cette expérience les nombres suivants

d'oscillations :

			Baromètre.
			po
Dans le gaz hydrogène.	Février 9.....	86313,93	30,215
	» 10....	86314,24	30,170
	Moyenne......	86314,085	30,1925
Dans l'air atmosphérique.	Février 9.....	86305,57	30,193

D'où il ressort que, sous la même pression barométrique, 30,193 pouces, le pendule faisait par jour 8,515 oscillations de plus dans le gaz hydrogène que dans l'air atmosphérique, la température du gaz étant 39°,32 et celle de l'air 38°,1.

Le gaz hydrogène avait été préparé, sous la surveillance de M. Newmann, par l'action du zinc sur l'acide sulfurique étendu d'eau ; il était recueilli dans un gazomètre avant d'être introduit dans l'appareil, ce qui se faisait par le tuyau métallique ordinairement lié avec la pompe à air. Le cylindre contenant du muriate de chaux faisait partie de la communication entre l'appareil et le gazomètre.

Expérience VIII.

Février 10, 11 et 12. — L'horloge avance par jour de $4^m 14^s,38$.

L'hydrogène ayant été de nouveau pompé jusqu'à ce que l'éprouvette marquât 0,7 pouce, une atmosphère fraîche d'hydrogène fut introduite par M. Newmann, avec tous les soins possibles pour assurer sa pureté; on fit alors les observations suivantes :

Observateur Taylor.

Nos de la coïnc.	Therm. 1.	Therm. 4.	Barom. intérieur.	Coïncidence.	Ampl.	Intervalle moyen.	Corr. d'ampl.	Réduction à 36°.	Oscill. corrigées à 36°.
	o	o	po	h m s	o	s	s	s	
1..	»	»	»						
2..	39,8	39,7	29,84	11.24.31,33	0,92				
3..	»	»	»						
80..	»	»	»			507,705	+0,35	+1,58	86314,95
81..	»	»	»						
82..	»	»	»						
83..	39,7	39,7	29,82	22.49.55,43	0,128				
84..	»	»	»						
85..	»	»	»						
86..	»	»	»						
	39,75		29,83	Index +0,32. Réd. à 32° —0,03. Bar. corr. 30,12.					86314,95

Une bouteille fut remplie avec soin, par M. Newmann, du gaz hydrogène de l'appareil et transmise par lui à M. Faraday, à l'Institution Royale, pour être examinée. J'ai reçu, depuis, la Note suivante :

« J'ai examiné le gaz hydrogène et n'y ai trouvé aucune quantité d'air appréciable. S'il en contient, c'est moins de $\frac{1}{200}$, ce qui, je crois, est comme rien dans vos expériences. »

Le reste de l'hydrogène fut ensuite extrait de l'appareil aussi loin que l'état de la pompe le permettait, l'éprouvette descendit à 0,8 pouce ; et l'on fit alors les observations suivantes :

Observateur Taylor.

Nos de la coïnc.	Thermomètres. 1.	2.	3.	4.	Éprouvette.	Coïncid.	Amplitude.	Interv. moy.	Corr. d'ampl.	Réduct. à 36°.	Oscill. corrigée à 36°.
	°	°	°	°	po	h m s	° ′				
1.	»	»	»	»	»						
2.	39,8	40,3	40,3	40,4	0,80	1. 1.55,67	1,22				
3.	»	»	»	»	»			507ˢ,66	+1ˢ,76	+1ˢ,94	86316,6
											Éprouvette. 0,8
44.	»	»	»	»	»						
45.	39,9	40,4	40,3	40,8	0,84	7. 5.44,83	0,86				
46.	»	»	»	»	»			509,284	+0,82	+2,00	86316,9
											Éprouvette. 0,8
88.	»	»	»	»	»						
89.	40,1	40,6	40,5	40,8	0,88	13.19.13,33	0,56				
90.	»	»	»	»	»			510,37	+0,25	+2,05	86317,1
											Éprouvette. 0,92
150.	»	»	»	»	»						
151.	40,1	40,6	40,6	40,8	0,97	22. 6.36,67	0,24				
152.	»	»	»	»	»						
	39,97 + 0,75 = 40,72				0,872						86316,9

La libre communication fut alors établie avec l'air extérieur, après quoi l'on fit les observations suivantes :

Observateur Taylor.

N° de la coïnc.	Therm. 1.	Therm. 4.	Barom. intérieur.	Coïncidence.	Ampl.	Intervalle moyen.	Corr. d'ampl.	Réduction à 36°.	Oscill. corrigées à 36°.
	°	°	po	h m s	° '	s	s	s	
1..	»	»	»						
2..	41,1	41,0	30,14	0. 0.24,5	0,97				
3..	»	»	»						
						494,26	+0,56	+2,11	86306,39
24..	»	»	»						
25..	41,3	41,6	30,11	3. 9.52,5	0,27				
26..	»	»	»						
	41,25		30,125						86306,39

Capill. +0,019. Réd. à 32° — 0,031. Bar. corr. 30,113

Cette expérience donne les nombres suivants d'oscillations :

Dans une atmosphère de gaz hydrogène.	86314,95	Baromètre.	30^{po},120
Dans le gaz hydrogène raréfié..........	86316,90	Éprouvette.	0^{po},872
Dans l'air atmosphérique...............	86306,39	Baromètre.	30^{po},113

D'où il résulte : 1° que, à une hauteur barométrique à peu près la même (30,120 pouces pour le gaz hydrogène, et 30,113 pouces pour l'air atmosphérique), le pendule faisait 8,56 oscillations par jour de plus dans le gaz hydrogène que dans l'air atmosphérique ; la température du gaz étant 39°,75 et celle de l'air 41°,25. Et 2°, que le pendule faisait 1,95 oscillation par jour de plus dans le gaz hydrogène, quand la hauteur de l'éprouvette était réduite à 0,872 pouce, que lorsque la pression du gaz était 30,120 pouces ; ainsi une différence de 1,95 oscillation par jour correspond à une différence barométrique de 29,248 pouces de gaz hydrogène, la température du gaz étant 39°,75 sous la plus forte pression, et 40°,72 quand il était raréfié.

Cette expérience et la précédente nous fournissent les données nécessaires pour nous prononcer sur trois points distincts : 1° le retard occasionné par une atmosphère de gaz hydrogène ; 2° le retard occasionné par une atmosphère d'air ordinaire, et 3° le retard comparatif dans l'air et dans le gaz hydrogène.

1° D'après les résultats de l'expérience VIII, nous avons 1,95 oscillation par jour pour le retard produit par le gaz hydrogène sous la pression de 29,248 pouces; par suite, deux oscillations par jour est la réduction au vide pour le gaz hydrogène à 40° sous la pression de 30 pouces; et le nombre des oscillations du pendule en un jour dans le vide, déduit des oscillations dans le gaz hydrogène, est 86316,95.

2° Le nombre des oscillations dans le vide, 86316,95, diminué du nombre des oscillations, 86306,39, dans l'air atmosphérique, donne 10,56 oscillations par jour pour la réduction au vide, l'air étant à 41°,25 et sous la pression de 30,113 pouces.

3° Le rapport des retards occasionnés par l'air et par le gaz hydrogène, tous deux à 40° et sous la pression de 30 pouces, est celui de 10,55 à 2.

En combinant la VIIe expérience avec la VIIIe, nous obtenons la confirmation des déductions 2° et 3°, d'après les oscillations dans l'air et dans le gaz hydrogène observées les 9 et 10 février. Le pendule, dans l'expérience VII, faisait 86314,085 oscillations dans l'hydrogène à 39°,32 sous la pression de 30,192 pouces; ce qui équivaut à 86314,085 + 2,01 ou 86316,095 oscillations dans le vide. Dans la même expérience, le nombre des oscillations dans l'air était 86305,57, le baromètre marquant 30,193 pouces et le thermomètre 38°,1. De là, on déduit pour la réduction au vide relative à l'air sous cette pression et à cette température

$$86316,095 - 86305,57$$

ou 10,525 oscillations par jour. Et le rapport des retards dans l'air et dans le gaz hydrogène, tous deux à 40° et sous la pression barométrique de 30 pouces, est celui de 10,41 à 2.

Les deux valeurs de ce rapport sont donc 10,55 à 2 et 10,41 à 2, ou, en moyenne, le retard dans l'air est à celui dans le gaz hydrogène comme $5\frac{1}{4}$ est à l'unité. Mais le rapport des densités de l'air et du gaz hydrogène est à peu près celui de 13 à 1; si donc la résistance des fluides élastiques aux corps qui tombent en les traversant était simplement proportionnelle à la densité de ces fluides, le retard produit par l'air devrait être 13 fois plus grand que celui qu'occasionne le gaz hydrogène. La différence de ce rapport à celui que donne l'expérience est trop grande pour qu'on

puisse raisonnablement l'attribuer à une erreur accidentelle des expériences, surtout en présence de l'identité presque absolue des divers résultats. Ce fait n'est-il pas l'indication d'une propriété inhérente aux fluides élastiques, analogue à la viscosité des liquides, qui produirait une résistance au mouvement des corps qui les traversent, indépendamment de leur densité? Propriété possédée, dans ce cas, à des degrés différents par l'air et par l'hydrogène, puisqu'il ressort des expériences que le rapport de la résistance de l'hydrogène à celle de l'air est plus que double de celui qui résulterait de leurs densités. Si l'existence d'une telle propriété, variable d'un fluide à un autre, venait à être confirmée par des expériences actuellement en cours d'exécution sur d'autres gaz, il serait difficile d'imaginer un appareil plus propre à en mesurer la valeur que celui que je viens de décrire; et le pendule, outre ses nombreuses et importantes applications à la Physique générale, en trouverait une nouvelle pour cette détermination très délicate sans doute, mais pas plus délicate avec les soins convenables que bien d'autres du domaine de la Chimie.

Expériences IX, X et XI.

Je réunis ces expériences comme ayant un but commun, distinct de celui des précédentes observations. Il restait encore à établir par l'expérience que le pendule, oscillant dans l'intérieur de l'appareil mis en libre communication avec l'air extérieur, y faisait le même nombre d'oscillations que si l'enveloppe de verre n'existait pas. Dans ce but, on fit descendre simultanément les vis du pied de l'appareil, de manière à détacher de la pièce de suspension le plus élevé des trois cylindres de verre. On pouvait alors enlever ces cylindres et les replacer dans les opérations successives; lorsque les cylindres étaient en place, l'appareil était dans le même état que dans les observations faites antérieurement dans l'air, à cela près qu'il existait une séparation de moins d'un dixième de pouce entre le manchon supérieur et la plaque de suspension.

Expérience IX.

Février 17. — L'horloge avance de $4^m 14^s,38$ par jour.

Observateur Taylor.

Les manchons sont enlevés; les oscillations se font à l'air libre.

Nos de la coïnc.	Therm. 1.	Therm. 4.	Bar. étalon.	Coïncidence.	Ampl.	Intervalle moyen.	Corr. d'ampl.	Réduction à 36°.	Oscill. corrigées à 36°.
	°	°	po	h m s	°	s	s	s	
1..	»	»	»						
2..	43,4	43,5	29,70	23.1.21,67	1,18	491,25	+0,89	+3,35	86305,8
3..	»	»	»						
23..	»	»	»						
24..	44,5	44,3	29,71	2. 1.29,17	0,37				
25..	»	»	»						
	43,95		29,705						86305,8

Capill. +0,019. Réd. à 32° — 0,039. Bar. corr. 29,685

Les manchons sont remis en place.

Nos de la coïnc.	Therm. 1.	Therm. 4.	Bar. étalon.	Coïncidence.	Ampl.	Intervalle moyen.	Corr. d'ampl.	Réduction à 36°.	Oscill. corrigées à 36°.
	°	°	po	h m s	°	s	s	s	
1..	»	»	»						
2..	45,6	45,4	29,72	3.21.21,5	1,16	490,85	+0,86	+3,66	86305,8
3..	»	»	»						
23..	»	»	»						
24..	43,8	44,0	29,76	6.21.20,17	0,37				
25..	»	»	»						
	44,7		29,74						86305,8

Capill. +0,019. Réd. à 32° — 0,040. Bar. corr. 29,719

Les manchons sont enlevés.

Nos de la coïnc.	Therm. 1.	Therm. 4.	Bar. étalon.	Coïncidence.	Ampl.	Intervalle moyen.	Corr. d'ampl.	Réduction à 36°.	Oscill. corrigées à 36°.
	°	°	po	h m s	°	s	s	s	
1..	»	»	»						
2..	43,6	43,7	29,77	7.27.10,83	1,19	490,86	+0,95	+2,86	86305,12
3..	»	»	»						
23..	»	»	»						
24..	42,0	42,0	29,79	10.27. 9,67	0,41				
25..	»	»	»						
	42,8		29,78	Capill. +0,019. Réd. à 32° — 0,036, = 29,763					86305,12

			Baromètre.	Thermomètre.
Pendule à l'air libre.	Première série...	86305,82	29,685	43°,95
	Dernière série...	86305,12	29,763	42,8
	Moyenne.........	86305,47	29,724	43,37
Pendule enfermé..............		86305,81	29,719	44,7

D'où un excédent de 0,34 oscillation par jour pour le pendule enfermé dans son enveloppe de verre.

EXPÉRIENCE X.

Février 21. — L'horloge avance de $4^m 14^s,38$ par jour.

Observateur Taylor.

Les manchons sont enlevés.

Nos de la coïnc.	Therm. I.	Therm. 4.	Bar. étalon.	Coïncidence.	Ampl.	Intervalle moyen.	Corr. d'ampl.	Réduction à 36°.	Oscill. corrigées à 36°.
	°	°	po	h m s	°	s	s	s	
1..	»	»	»						
2..	43,9	44,0	29,06	22.16.27,83	1,16				
3..	»	»	»			491,93	+0,91	−3,47	86306,46
23..	»	»	»						
24..	44,6	44,4	29,03	1.16.50,33	0,40				
25..	»	»	»						
	44,25		29,045	Capill. −0,019.	Réd. à 32° −0,038. = 29,026				86306,46

Les manchons sont en place.

Nos de la coïnc.	Therm. I.	Therm. 4.	Bar. étalon.	Coïncidence.	Ampl.	Intervalle moyen.	Corr. d'ampl.	Réduction à 36°.	Oscill. corrigées à 36°.
	°	°	po	h m s	°	s	s	s	
1..	»	»	»						
2..	46,6	46,4	29,02	2. 6.37,33	1,10				
3..	»	»	»			490,90	+0,79	−4,18	86306,51
23..	»	»	»						
24..	45,3	45,3	29,00	5. 6.37,17	0,35				
25..	»	»	»						
	45,95		29,01	Capill. −0,019.	Réd. à 32° −0,043. = 28,986				86306,51

Nos de la coïnc.	Therm. 1.	Therm. 4.	Bar. étalon.	Coïncidence.	Ampl.	Intervalle moyen.	Corr. d'ampl.	Réduction à 36°.	Oscill. corrigées à 36°.
			Les manchons sont enlevés.						
	o	o	po	h m s	o	s	s	s	
1..	»	»	»						
2..	46,3	46,5	29,00	5.58.31,00	1,15	491,13	+0,87	+4,08	86306,47
3..	»	»	»						
23..	»	»	»						
24..	45,1	45,2	28,98	8.58.35,83	1,37				
25..	»	»	»						
	45,6		28,99	Capill. +0,019.		Réd. à 32° — 0,042.		= 28,967	86306,47

Cette expérience donne les nombres suivants d'oscillations :

			Baromètre.	Thermomètre.
				o
Pendule à l'air libre.	Première série...	86306,46	29,026	44,25
	Dernière série...	86306,47	28,967	45,7
	Moyenne.........	86306,46	28,996	44,97
Pendule oscillant dans son enveloppe.....................		86306,31	28,986	45,95

Ainsi les oscillations dans l'appareil fermé ont été dans cette expérience en défaut de 0,15 par jour.

Expérience XI.

Février 22. — L'horloge avance de $4^{m}14^{s},38$ par jour.

Observateur Taylor.

Les manchons sont enlevés.

Nos de la coïnc.	Therm. 1.	Therm. 4.	Bar. étalon.	Coïncidence.	Ampl.	Intervalle moyen.	Corr. d'ampl.	Réduction à 36°.	Oscill. corrigées à 36°.
	o	o	po	h m s	o	s	s	s	
1..	»	»	»						
2..	44,6	44,7	29,03	21.45.31,33	1,10	491,92	+0,79	+3,66	86306,53
3..	»	»	»						
23..	»	»	»						
24..	44,8	44,7	29,08	0.45.53,83	0,35				
25..	»	»	»						
	44,7		29,055	Capill. +0,019.		Réd. à 32° — 0,040.		= 29,034	86306,53

N°s de la coïnc.	Therm. 1.	Therm. 4.	Bar. étalon.	Coïncidence.	Ampl.	Intervalle moyen.	Corr. d'ampl.	Réduction à 30°.	Oscill. corrigées à 16°.
				Les manchons sont en place.					
	°	°	po	h m s	°	s	s	s	
1..	»	»	»						
2..	45,0	44,8	29,10	2. 6.44,5	1,08				
3..	»	»	»						
						491,85	− 0,76	− 3,5[illegible]	86306,30
23..	»	»	»						
24..	43,8	43,7	29,16	5. 7. 5,17	0,34				
25..	»	»	»						
	44,4		29,13	Capill. − 0,019. Réd. à 32° − 0,039. = 29,110					86306,30
				Les manchons sont enlevés.					
	°	°	po	h m s	°	s	s	s	
1..	»	»	»						
2..	43,5	43,6	29,17	6. 5.36,83	1,12				
3..	»	»	»						
						492,8	− 0,89	− 2,90	86306,49
23..	»	»	»						
24..	42,3	42,5	29,22	9. 6.18,5	0,38				
25..	»	»	»						
	42,9		29,195	Capill. − 0,019. Réd. à 32° − 0,035. = 29,179					86306,49

Les nombres d'oscillations dans cette expérience sont :

			Baromètre.	Thermomètre.
Pendule à l'air libre.	Première série...	86306,53	29,034	44°,7
	Dernière série...	86306,49	29,179	42,9
	Moyenne.........	86306,51	29,106	43,8
Le pendule oscillant dans son enveloppe.........		86306,30	29,110	44°,4

Ainsi les oscillations dans l'intérieur du récipient sont, dans cette expérience, en défaut de 0,21 par jour.

En résumé, nous obtenons les trois résultats suivants :

17 février. Exp. IX. — Les oscill. dans l'env. de verre sont en excès de 0,34
21 février. Exp. X. — » » en défaut de 0,15
22 février. Exp. XI. — » » en défaut de 0,21

En moyenne, les oscillations dans l'enveloppe de verre sont en défaut de 0,007 par jour.

Nous pouvons donc conclure que les observations des oscillations faites soit dans l'air confiné du récipient, soit à l'air libre les manchons de verre étant enlevés, conduisent au même résultat, pourvu que l'on multiplie suffisamment les expériences.

Enfin, l'examen de l'arête du contenu a montré qu'elle était aussi nette et aussi fine qu'au premier moment de son emploi. Les plans d'agate avaient conservé leur horizontalité ; les vis qui serrent ces plans contre la plaque circulaire et la plaque contre la charpente en fer étaient engagées aussi profondément qu'au commencement des expériences.

Il nous faut maintenant résumer les divers résultats, d'où doit être déduite la réduction au vide pour un pendule invariable oscillant dans l'air :

Expériences.				Réduction au vide.	Hauteur barométrique à 32°.	Température de l'air.
				osc	po	°
I.	— Juin	1828.	Londres.....	7,38	22,765	72,01
II.	— Juillet	1828.	Londres	9,065	27,721	69,70
III.	— Janv.	1829.	Greenwich. .	9,54	27,459	35,89
IV.	— Janv.	1829.	» ...	9,17	26,138	32,37
V.	— Janv.	1829.	» ...	10,38	29,109	36,40
VI.	— Janv.	1829.	» ...	5,705	16,080	35,65
VII.	— Févr.	1829.	» ...	10,525	30,193	38,10
VIII.	— Févr.	1829.	» ...	10,560	30,113	41,25
			Moyenne..........	9,042	26,197	45,17

On déduit de là 10,36 oscillations par jour pour la réduction au vide du pendule invariable, oscillant dans l'air à 45°, sous la pression de 30 pouces de mercure à 32°.

Pour montrer à quel degré d'approximation la moyenne représente les résultats de chacune des expériences dont elle a été déduite, nous pouvons calculer, d'après cette moyenne, le retard correspondant aux conditions de chacune des expériences, et mettre ce retard calculé en regard du résultat de l'observation réelle :

Expériences.	Retard calculé.	Retard observé.	Calcul.-Observ.
	osc	osc	
I	7,42	7,38	+ 0,04
II	9,08	9,065	+ 0,015
III	9,66	9,54	+ 0,12
IV	9,26	9,17	+ 0,09
V	10,24	10,38	— 0,14
VI	5,65	5,705	— 0,055
VII	10,575	10,525	+ 0,05
VIII	10,48	10,56	— 0,08

D'où nous voyons que, si l'on déduisait la réduction au vide séparément de chacune des huit expériences, on n'obtiendrait, dans aucun cas, une valeur différant de plus de 0,14 oscillation de la valeur adoptée. En d'autres termes, la plus grande différence qui se produirait si l'on déduisait la réduction, dont la détermination était l'objet de ces expériences, d'une expérience unique, au lieu de prendre la moyenne de toutes, n'excéderait dans aucun cas la 74e partie de la valeur de cette réduction.

La réduction pour la perte de poids dans l'air, ou la réduction telle qu'on la calculait jusqu'ici, pour les oscillations d'un pendule dans l'air à 45°, sous une pression de 30 pouces, est de 6,26 oscillations par jour. Le retard réel est donc de 4,1 oscillations par jour plus grand qu'on ne l'avait supposé ; et le rapport entre la réduction expérimentale et celle qui est maintenant reconnue erronée est celui de 1,655 à l'unité.

Si nous considérons les modifications que la substitution de la vraie réduction au vide à sa valeur erronée va introduire dans les résultats qu'ont donnés les pendules invariables touchant la variation de la gravité en différents lieux de la surface de la Terre, nous pouvons remarquer d'abord que ces résultats, étant purement relatifs, ne devront supporter qu'une très petite part des changements considérables que subiront toutes les déterminations déjà faites de la longueur absolue du pendule. L'erreur qui affecte les résultats relatifs des pendules invariables est limitée, dans tous les cas, à une fraction de la différence que les variations des conditions atmosphériques produisent dans la valeur de la perte

de poids aux différentes stations. Avec des pendules de même forme et de même matière que ceux dont nous avons fait usage dans les expériences actuelles, nous déduisons des résultats la fraction 0,65 pour valeur du coefficient de cette différence; ou, en d'autres termes, l'erreur qui affecte les résultats est à peu près les deux tiers de la différence des valeurs de la correction de perte de poids calculée pour les différentes stations.

La partie de cette erreur qui provient des variations barométriques ne peut être qu'extrêmement petite toutes les fois que l'on compare des stations peu éloignées du niveau de la mer. Le poids spécifique du pendule étant environ 8, 6, un pouce de mercure sur la hauteur barométrique correspond à une variation de 21 centièmes d'oscillation par jour sur la correction de perte de poids, ce qui, multiplié par 0,65, donne environ 14 centièmes d'oscillation. Si l'on compare des stations tropicales et extra-tropicales, on voit que le baromètre, dans les hautes et les moyennes latitudes, est sujet à des fluctuations d'un pouce, et même de plus d'un pouce dans les cas extrêmes, autour de sa hauteur moyenne, qui reste au contraire uniforme ou à fort peu près telle entre les tropiques. Mais comme, en général, les observations embrassent plusieurs jours à chaque station, et que le baromètre se rapproche de sa hauteur moyenne en proportion même de leur durée, on trouvera, en compulsant les registres des expériences sur le pendule, qu'une différence d'un demi-pouce dans la hauteur barométrique à deux stations est un événement rare. La correction pour un demi-pouce se réduit à 0,07 d'une oscillation, qu'il faut ajouter au nombre des oscillations diurnes à la station où le baromètre était le plus haut.

Mais l'erreur résultant des variations de la température aux différentes stations est beaucoup plus considérable que celle qui provient des variations du baromètre; elle est certainement suffisante dans certains cas pour influer sur la valeur de l'ellipticité du globe. Il n'est pas rare de trouver une différence de 40° Fahrenheit entre les tropiques et les hautes latitudes; et comme 16° Fahrenheit produisent sur la densité de l'air le même effet qu'un pouce de mercure, l'erreur dans ce cas s'élèvera à $0,52 \times 0,65$ ou à 34 centièmes d'oscillation par jour. De plus, comme la différence de température est toujours en faveur des stations tropicales, l'er-

reur sera de nature constante, au contraire de la plupart des petites irrégularités auxquelles sont sujettes les observations du pendule, qui peuvent se compenser d'elles-mêmes par la multiplication des expériences.

Les stations que j'ai moi-même visitées avec le pendule embrassent, je crois, un plus grand nombre et une plus grande variété de températures que celles d'aucun autre expérimentateur. Les remarques précédentes s'appliqueraient donc particulièrement à ces stations, sans une circonstance qui, fort heureusement, a produit dans tous les cas une compensation des erreurs qui autrement seraient nées de l'influence des variations de la température sur la densité de l'air. Cette compensation est une conséquence de ce fait que la *correction de température*, c'est-à-dire la correction du nombre des oscillations dépendant de la température du pendule, a été obtenue par un mode expérimental particulier, et non pas déduite de la dilatation du métal déterminée par des expériences pyrométriques : on a fait osciller le pendule, à Londres, à des températures assez largement différentes pour comprendre entre elles toutes celles qu'on a pu observer en d'autres lieux. Si les oscillations aux hautes et aux basses températures à Londres, d'où l'on a déduit la correction de température, avaient été réduites au vide par l'emploi de la réduction vraie, telle qu'on la connaît maintenant, au lieu de la correction de perte de poids dans l'air que l'on croyait alors constituer la réduction véritable, la valeur de l'influence d'un degré Fahrenheit sur le nombre diurne d'oscillations aurait été 0,43 au lieu de 0,421. Le premier de ces nombres est la correction vraie de température, due à la dilatation du métal; le second est cette correction diminuée de l'effet produit par un degré de température sur la partie de la réduction au vide jusqu'ici négligée. C'est le second nombre, 0,421, qui a été employé pour toutes les expériences auxquelles je fais allusion, afin de les rapporter à un terme moyen de comparaison. Par suite, les corrections de température ainsi appliquées sont partout trop petites, si on les regarde comme représentant seulement l'effet de la dilatation du métal sur les oscillations du pendule ; mais elles sont expérimentalement correctes, si on les regarde comme représentant les effets réunis de la dilatation du métal et de la différence de température sur la partie de la réduction au vide qui

n'est pas comprise dans la correction de perte de poids dans l'air.

L'effet des variations de la hauteur barométrique sur les résultats de ces expériences est trop insignifiant pour exiger une correction spéciale; il n'excède pas deux centièmes d'oscillation dans l'accélération moyenne du pendule déduite de la comparaison des stations tropicales et extra-tropicales.

Un nouveau calcul de ces expériences, avec les éléments plus corrects de réduction que nous possédons maintenant, n'aurait donc d'autre effet que d'augmenter les nombres d'oscillations du pendule obtenus en chaque station d'une même quantité, ou de quantités si voisines que la différence en serait absolument insignifiante; il laisserait donc à l'accélération du pendule aux diverses stations, qui était l'objet de nos recherches, la valeur déjà déterminée.

SUR LA RÉDUCTION AU VIDE

DU

PENDULE RÉVERSIBLE

DU CAPITAINE KATER;

PAR LE CAPITAINE SABINE,
DE L'ARTILLERIE ROYALE, SECRÉTAIRE DE LA SOCIÉTÉ ROYALE.

(Mémoire lu à la Société Royale le 18 juin 1829.)

Le pendule réversible avec lequel le capitaine Kater a fait ses célèbres et admirables expériences sur la longueur du pendule battant la seconde dans le vide, à Portland Place, a été déposé, après l'exécution de ces expériences, dans le Cabinet de la Société Royale.

Les expériences du capitaine Kater ont été faites, comme on sait, à l'air libre dans l'atmosphère ordinaire; et l'influence de l'air pour ralentir les oscillations et interférer ainsi avec le simple effet de l'attraction de la Terre a été calculée d'après le principe universellement admis à cette époque par les géomètres et les expérimentateurs.

De récentes recherches, théoriques et expérimentales, ont démontré l'inexactitude du principe d'après lequel on calculait alors la réduction au vide; et une conséquence de ces recherches est de rendre nécessaires de nouvelles expériences avec le pendule réversible du capitaine Kater, pour déterminer la véritable durée de l'oscillation dans le vide correspondant à la distance des couteaux, et pour permettre de substituer au résultat que le capitaine Ka-

ter a publié dans les *Transactions philosophiques* de 1818 la longueur correcte du pendule à seconde à laquelle il serait lui-même arrivé, s'il avait connu en 1817 le principe qui n'a été découvert que plus tard.

L'appareil dont il a été rendu compte à la Société dans la session actuelle, et dans lequel un pendule peut osciller successivement dans l'air à sa densité ordinaire et dans un milieu raréfié presque jusqu'au vide, donnait le moyen de faire ces nouvelles expériences. Sur le désir du capitaine Kater et à la demande du Conseil de la Société Royale, j'ai entrepris de les exécuter ; et j'espère présenter à la Société, au commencement de sa prochaine session, le véritable résultat auquel conduit l'emploi du pendule du capitaine Kater (1).

D'après les principes développés dans la théorie nouvelle de l'action de l'air sur les oscillations du pendule, il était à penser qu'un pendule réversible, tel que celui qu'a employé le capitaine Kater, doit être, à deux points de vue, influencé par le milieu d'une manière différente de ce qu'on avait supposé. D'abord, au point de vue de sa prétendue réversibilité ; car, puisque la valeur du retard occasionné par l'air dépend en partie de la figure du corps oscillant, et que les deux extrémités du pendule ne sont pas symétriques, l'une étant garnie d'un poids considérable, et l'autre d'un poids beaucoup plus faible et de forme différente, la réduction au vide ne doit pas avoir la même valeur lorsque le pendule est suspendu le gros poids en haut, que lorsqu'il est suspendu le gros poids en bas. Par suite, c'est une erreur de croire que le pendule est réversible lorsque ses oscillations dans l'air sont identiques dans les deux positions. En second lieu, au point de vue de la valeur du ralentissement produit par l'air, laquelle doit être

---

(1) Les expériences annoncées ici par Sabine furent exécutées par lui à l'observatoire de Greenwich en août, septembre et octobre 1829, et en janvier et février 1830, et communiquées à la Société Royale le 16 juin 1831. Mais le pendule de Kater avait été profondément modifié par la suppression de ses appendices en bois ; le poids mobile avait été fixé et le curseur restait la seule pièce mobile de l'appareil. La distance des couteaux était celle qu'avait déterminée Kater en 1817.

Le résultat des expériences fut que la longueur du pendule à secondes dans le vide est à Greenwich 39,13734 pouces anglais, ce pouce étant celui de l'étalon de Sir G. Shuckburgh à 62° Fahrenheit. (C. W.)

considérablement plus grande que celle que l'on calcule par la seule considération de la perte de poids.

Les expériences qui ont déjà été faites dans l'appareil avec ce pendule, d'abord dans l'état où le capitaine Kater l'a construit et l'a employé, puis après certaines modifications que j'ai jugé utile de faire à la queue du pendule, ont pleinement confirmé ces présomptions. Dans l'opinion de personnes dont le jugement est pour moi d'un grand poids, elles présentent, pour la mise en lumière et la démonstration expérimentale du mode d'action d'un milieu qui agit sur un pendule et en ralentit les oscillations, assez d'intérêt pour qu'il ait paru désirable que j'en soumette un bref exposé à la Société avant qu'elle se sépare.

Le pendule, ayant été apporté à Greenwich, a été examiné et trouvé en excellent état ; les arêtes des couteaux étaient aussi propres et en apparence aussi parfaites que lors de leur premier emploi; le petit poids était bien fixé en place par ses vis, et le curseur se trouvait à 18,6 divisions du côté du gros poids. On essaya les oscillations sur l'un et sur l'autre couteau, et l'on trouva, par un petit nombre de coïncidences, que le nombre en était presque identiquement le même. Il était donc très probable qu'aucun changement appréciable n'avait été apporté à la position du poids et du curseur depuis les expériences du capitaine Kater. Comme d'ailleurs la détermination de la réduction au vide pour chacune des deux positions du pendule, qui faisait l'objet de mes recherches, n'exigeait pas que la réversibilité fût rigoureusement établie, on a immédiatement procédé aux expériences pour déterminer le rapport des durées d'oscillations dans l'air à sa densité ordinaire et dans l'air fortement raréfié, d'abord le gros poids en bas, puis le gros poids à la partie supérieure.

Le gros poids en bas. — 21 avril 1829. — L'horloge de Dent fait 86466 oscillations.

Observateur Sabine.

N° de la coïnc.	Therm. étalon.	Barom. ou éprouv.	Coïncidence.	Ampl.	Intervalle moyen.	Corr. d'ampl.	Réduction à 49°.	Oscillat corrigée à 49°.
	o	po	h m s	o	s	s	s	
1..	»	»						
2..	50,0	29,630	2.41.38,17	0,82				
3..	»	»						
17..	»	»			432,97	+0,36	−0,24	86067,1
18..		»						
19..	49,1	29,630	4.44.18,6	0,18				
20..	»	»						
21..	»	»						
	49,55	29,630	Capill. −0,019.	Réd. à 32° − 0,053 = 29,596				86067,1

22 avril. — L'horloge fait 86466 oscillations.

Observateur Taylor.

N° de la coïnc.	Therm. étalon.	Barom. ou éprouv.	Coïncidence.	Ampl.	Intervalle moyen.	Corr. d'ampl.	Réduction à 49°.	Oscillat corrigée à 49°.
	o	po	h m s	o	s	s	s	
1..	»	»						
2..	47,7	1,05	0.27.23	1,10				
3..	»	»						
13..	»	»			449,44	+1,60	−0,24	86082,6
14..	47,7	1,05	1.57.16,33	0,88				
15..	»	»						
	47,7	+ Cor. de l'ind. pour un milieu raréfié 0,75 = 48°,45. Épr. 1,05						86082,6

Observateurs Taylor et Sabine.

N° de la coïnc.	Therm. étalon.	Barom. ou éprouv.	Coïncidence.	Ampl.	Intervalle moyen.	Corr. d'ampl.	Réduction à 49°.	Oscillat corrigée à 49°.
	o	po	h m s	o	s	s	s	
1..	»	»						
2..	49,0	29,350	2.34.39,33	0,95				
3..	»	»			434,28	+0,65	−0,17	86068,2
11..	»	»						
12..	48,2	29,350	3.47. 2,17	0,36				
13..	»	»						
	48,6	29,350	Capill. −0,019.	Réd. à 32° − 0,052 = 29,317				86068,2

Le gros poids en haut. — 23 avril. — L'horloge fait 86400 oscillations.

Observateur Sabine.

N° de la coïnc.	Therm. étalon.	Barom. ou éprouv.	Coïncidence.	Ampl.	Intervalle moyen.	Corr. d'ampl.	Réduction à 49°.	Oscillat. corrigées à 49°.
	°	po	h m s	°	s	s	s	
1..	»	»						
2..	49,5	29,604	1. 2.49,17	0,72				
3..	»	»			438,484	−0,29	+0,26	86072,15
12..	»	»						
13..	49,7	29,612	2.23.12,5	0,18				
14..	»	»						
	49,6	29,608	Capill. −0,019.	Réd. à 32° — 0,052 = 29,575				86072,15

Observateurs Sabine et Taylor.

N° de la coïnc.	Therm. étalon.	Barom. ou éprouv.	Coïncidence.	Ampl.	Intervalle moyen.	Corr. d'ampl.	Réduction à 49°.	Oscillat. corrigées à 49°.
	°	po	h m s	°	s	s	s	
1..	»	»						
2..	49,6	0,90	3.26. 0,0	1,44				
3..	»	»			454,91	+1,04	−0,39	86087,27
34..	»	»						
35..	48,7	3,30	7.36.12	0,30				
36..	»	»						
	49,15	+ Cor. de l'ind. dans un milieu raréfié 0,75 = 49°,9. Épr. 2,10						86087,27

Observateur Taylor.

N° de la coïnc.	Therm. étalon.	Barom. ou éprouv.	Coïncidence.	Ampl.	Intervalle moyen.	Corr. d'ampl.	Réduction à 49°.	Oscillat. corrigées à 49°.
	°	po	h m s	°	s	s	s	
1..	»	»						
2..	49,6	29,640	8.13.42	1,176				
3..	»	»			439,1	−0,62	−0,04	86072,84
13..	»	»						
14..	48,6	29,630	9.41.31,17	0,20				
15..	»	»						
	49,1	29,635	Capill. −0,019.	Réd. à 32° — 0,052 = 29,602				86072,84

Ces expériences donnent les nombres suivants d'oscillations :

Le gros poids en bas.

		Baromètre.
	osc	po
21 avril, avant l'oscillation dans le milieu raréfié....................	86067,18	29,596
22 avril, après l'oscillation dans le milieu raréfié....................	86068,26	29,517
Moyenne.......	86067,72	29,556

		Éprouvette.
Oscillations dans l'air raréfié, ramenées à la même température que celles dans l'air à la densité ordinaire	osc 86082,60	po 1,05
Différence......	14,88	28,406

Ainsi, quand le gros poids est à la partie inférieure, une différence de pression atmosphérique de 28,406 pouces de mercure à 32° produit une différence de 14,88 oscillations par jour; la température de l'air à pleine pression étant 49°,07 et celle du milieu raréfié 48°,45.

Le gros poids en haut.

		Baromètre.
23 avril, avant l'oscillation dans le milieu raréfié....................	osc 86072,15	po 29,575
23 avril, après l'oscillation dans le milieu raréfié....................	86072,84	29,602
Moyenne.......	86072,49	29,588

		Éprouvette.
Oscillations dans l'air raréfié, ramenées à la même température que celles dans l'air à sa densité ordinaire	osc 86087,27	po 2,10
Différence......	14,78	27,488

Ainsi, le gros poids étant en haut, on trouve une différence de 14,78 oscillations par jour, pour une différence de pression de 27,488 pouces de mercure à 32°, la température de l'air à pleine pression étant 49°,35 et celle du milieu raréfié 49°,9.

De ces résultats nous déduisons 15,7 oscillations par jour pour la réduction au vide du pendule réversible, tel qu'il a été employé par le capitaine Kater, quand il oscille le gros poids en bas, dans l'air à 49° sous la pression de 30 pouces de mercure à 32°; et 16,1 oscillations, lorsque le pendule est renversé ou le gros poids en haut, dans l'air à la même température et à la même densité.

D'après la formule employée par le capitaine Kater pour réduire au vide les oscillations dans l'air, la réduction serait la même pour les deux positions du pendule, et sa valeur pour l'air à la

température et sous la pression indiquées serait un peu supérieure à 7 oscillations par jour.

Dans la relation des expériences du capitaine Kater (*Phil. Trans.*, 1818, p. 75, et T. IV de ce Recueil, p. 110), il est remarqué qu'un changement subit et considérable étant survenu dans l'état hygrométrique de l'atmosphère, les oscillations, qui avaient été précédemment identiques dans les deux positions du pendule, cessèrent de l'être. Le capitaine Kater attribue cet effet à une variation dans le poids des extrémités du pendule qui étaient en bois, ces pièces ayant perdu leur humidité à mesure que l'air devenait plus sec. Comme on sait aujourd'hui que l'effet général de l'air sur le ralentissement de l'oscillation est plus que double de ce qu'on le supposait alors, et que les queues en bois ont proportionnellement, par suite de leur position, une influence beaucoup plus grande sur ce ralentissement que celle qui serait due simplement à la diminution de poids spécifique du pendule résultant de leur diminution de poids, on n'a que de nouvelles raisons d'accepter l'explication du capitaine Kater, et de voir dans cette action de l'humidité une cause si dangereuse de dérangement qu'on doit écarter absolument l'emploi de substances dont l'humidité peut altérer la forme ou le poids.

C'est pour ce motif que je me déterminai à substituer aux lames de bois des queues en laiton, en modifiant en même temps la position ou la grandeur du poids le plus faible, de manière à rétablir l'égalité des oscillations. Mais, avant de faire ce changement, et pour mieux mettre en lumière l'effet des queues de bois, je les avais réduites à moins de la moitié de leur longueur première, en enlevant de chacune 10,6 pouces et leur laissant seulement 6,4 pouces à partir de l'extrémité de la tige de cuivre. En substituant un poids encore plus faible que celui du capitaine Kater, 1925 grains au lieu de 3325, de même métal et de même forme, et le fixant solidement à la même position que l'ancien, on obtint de nouveau un pendule à peu près réversible. Les expériences faites avec ce nouvel instrument, dans le même ordre que les précédentes, ont donné les résultats suivants.

Le gros poids étant à la partie inférieure, on trouva une différence de 11,9 oscillations par jour pour une différence de pression atmosphérique de 28,741 pouces de mercure à 32°, la température

de l'air à pleine pression étant 53°,2 et celle de l'air raréfié 53°,8.

Et avec le gros poids en haut, une différence de 14 oscillations par jour, pour une différence de 28,15 pouces de mercure à 32°, la température de l'air à pleine pression étant 51°,4 et celle de l'air raréfié 53°,8.

Ce qui donne 12,4 oscillations pour la réduction au vide, après le raccourcissement des queues en bois de 17 pouces à 6,4 pouces, le gros poids étant en bas, dans l'air à 53°,5 sous la pression de 30 pouces de mercure à 32°; et 14.9 oscillations par jour quand le gros poids est en haut, dans l'air à la même température et à la même densité.

Les queues en bois furent alors supprimées et remplacées par des bandes de laiton de 7 pouces de long à partir des extrémités de la barre. Le pendule fut rendu réversible dans l'air au moyen du petit poids employé par le capitaine Kater, qui fut vissé à la barre à une distance de son couteau un peu plus plus grande qu'elle n'était dans les expériences primitives. Les coïncidences furent observées à la manière ordinaire; et l'on reconnut qu'avec le gros poids en bas, une différence de 11,3 oscillations par jour correspondait à une différence de pression atmosphérique de 28,46 pouces de mercure à 32°, la température de l'air à pleine pression étant 58° et celle de l'air raréfié 55°,5 ; et qu'avec le gros poids en haut, la différence était de 12 oscillations par jour, pour une différence de pression atmosphérique de 28,04 pouces de mercure à 32°, la température de l'air à pleine pression étant 60° et celle de l'air raréfié 60°,5.

On en déduit, pour la réduction au vide, 11,8 oscillations par jour, le gros poids étant en bas, dans l'air à 60° sous la pression de 30 pouces de mercure à 32° ; et 12,8 oscillations par jour quand le gros poids est en haut.

Enfin, si nous résumons les résultats obtenus avec les queues du pendule sous leurs diverses formes, nous avons pour la réduction au vide :

	Le gros poids	
	en haut.	en bas.
	osc	osc
1° Avec les queues en bois de 17 po ..	16,1	15,7
2° Avec les queues en bois de 6,4 ..	14,9	12,4
3° Avec les queues en laiton de 7 ..	12,8	11,8

La comparaison de 1° avec 2°, et de 1° et 2° avec 3°, fait voir quel effet considérable produit l'emploi d'une matière aussi légère que le bois dans la construction des queues du pendule, pour accroître la différence entre les oscillations dans l'air et dans le vide. La substitution de lames de cuivre aux réglettes de sapin du capitaine Kater a diminué le ralentissement produit par l'air de non moins que de 3 à 4 oscillations par jour, le pendule oscillant sur l'un des couteaux, et de plus de 4 vibrations par jour quand il oscille sur l'autre. Lorsque les queues en bois étaient réduites à la même longueur, ou à peu près, que les queues en laiton, le ralentissement était encore plus grand avec elles qu'avec les pièces en laiton de mêmes dimensions et de même forme, de 2 oscillations par jour sur l'un des couteaux, et de 1 oscillation par jour sur l'autre. Le retard était dans tous les cas beaucoup plus considérable que celui qu'aurait donné le calcul fondé sur la seule considération de la perte de poids dans l'air; la différence est surtout sensible dans les cas où les extrémités du pendule étaient formées d'une matière légère, car le retard dans ces deux cas excédait de beaucoup la proportion due à la diminution du poids spécifique général du pendule résultant de l'addition de ces petites pièces de bois.

La comparaison des retards observés dans les deux positions du pendule, dans chacune de ces expériences, nous donne la confirmation de l'opinion énoncée au commencement de cette Note, qu'en raison du défaut de symétrie des deux moitiés du pendule, la réduction au vide ne doit pas être la même pour les deux positions de l'instrument. Nous avons aussi un curieux exemple de l'influence de l'addition de portions égales de matières à chacune des extrémités du pendule, qui diminue la différence des retards occasionnée par la dissemblance de la forme et de la dimension des poids. Avec des queues en bois courtes, la différence qui, sans queue aucune, aurait été probablement de plus de 3 oscillations par jour, s'élève à 2,5 oscillations. Avec les queues en laiton, elle se réduit à une oscillation. Et avec les queues en bois ayant toute leur longueur primitive, l'effet de l'inégalité des poids était presque entièrement compensé : le retard est, à moins d'une demi-oscillation, le même dans les deux positions du pendule.

Enfin, il est curieux de voir combien le résultat obtenu par le

capitaine Kater pour la longueur du pendule à secondes dépendait de cette circonstance purement accidentelle de l'addition des pièces de queue au pendule avec lequel il a opéré. Si les conditions de ses expériences avaient été différentes en ce qui concerne ces pièces, si elles avaient été en laiton par exemple, ou si, restant en bois, elles avaient eu une longueur autre que celle qui s'est trouvée déterminée par la condition accidentelle des hauteurs relatives de l'horloge et du support du pendule; si elles n'avaient pas existé et si l'on avait observé les coïncidences au moyen de la barre de cuivre elle-même; dans tous les cas, le résultat eût été grandement différent de celui qu'on a obtenu.

RECHERCHES

SUR LA

CORRECTION DU PENDULE

POUR LA RÉDUCTION AU VIDE,

ACCOMPAGNÉES DE

REMARQUES SUR QUELQUES ANOMALIES OBSERVÉES DANS LES EXPÉRIENCES DU PENDULE;

PAR F. BAILY.

Mémoire lu à la Société Royale de Londres le 31 mai 1832.
(Extrait des *Philosophical Transactions pour* 1832, p. 399.)

Le grand intérêt que l'on attache, depuis quelques années, aux expériences du pendule s'est manifesté non seulement par les nombreux et importants travaux de plusieurs des mathématiciens et expérimentateurs les plus distingués de notre époque, mais aussi par les nombreux voyages scientifiques qui ont été entrepris, sous les auspices de quelques-uns des Gouvernements européens, dans le but d'obtenir un grand nombre d'observations du pendule en différentes régions du globe, et de déduire de la comparaison des résultats la vraie figure de la Terre. Ces résultats, ou le nombre de vibrations exécutées dans un jour solaire moyen, soit par le même pendule, soit par des pendules différents, ont été considérés, jusque dans ces derniers temps, comme rigoureusement comparables après certaines corrections bien connues,

qui les ramenaient : 1° à l'arc infiniment petit; 2° à une même température normale ; 3° au vide, et finalement au niveau moyen de la mer.

M. Bessel cependant a récemment montré que la formule de *réduction au vide* est très défectueuse ; et le Dr Young a fait voir que celle de la réduction au niveau de la mer est, dans beaucoup de cas, trop grande. De son côté, le capitaine Sabine, dans un Mémoire récemment publié dans les *Transactions* de cette Société (1), a montré qu'il y a lieu de suspecter l'exactitude de la formule ordinaire de réduction à l'amplitude infiniment petite. Ce dernier auteur avait déjà auparavant mis en lumière, dans un autre travail (2), la discordance des résultats qu'on obtient en faisant usage d'un même couteau et de plans d'agate différents; il avait aussi fait ressortir l'influence considérable de certaines couches géologiques situées à proximité du pendule ; et il avait même pensé que les résultats pouvaient être influencés par l'existence de grands bâtiments dans le voisinage. Mais à quelques causes que puissent être dues les anomalies observées, je dois avouer que, pendant une longue suite d'expériences sur divers pendules, aux différentes saisons de l'année et dans les circonstances les plus variées, j'ai moi-même rencontré fréquemment des discordances qui défiaient tout essai d'explication par aucune des lois connues applicables à ce sujet, et je crois que d'autres personnes aussi, qui se sont beaucoup occupées des expériences du pendule, ont accidentellement rencontré des anomalies qu'elles ont été incapables d'expliquer d'une manière satisfaisante. Comme il est désirable néanmoins que ces difficultés soient éclaircies, s'il est possible, et comme chaque nouveau document relatif à un sujet aussi important et fondé sur des expériences aussi délicates doit ajouter à nos moyens de les écarter, je crois n'avoir pas besoin de me justifier d'appeler l'attention de la Société sur les résultats de quelques expériences, faites avec des pendules de différentes formes et de construction variée, qui ont immédiatement trait aux discordances en question.

---

(1) *Phil. Trans. for* 1831, p. 467-469.

(2) *An account of experiments to determine the figure of the Earth;* in-4°, p. 190 et 371. Londres, 1825.

En fait, tant que nous ne pouvons construire deux pendules qui donnent toujours et tous deux le même résultat, débarrassé de toutes ces discordances, l'important problème de la détermination de la longueur du pendule à secondes ne peut être considéré comme entièrement résolu ; et les observations des différents expérimentateurs faites en diverses parties du globe, avec des pendules différents, ne peuvent être strictement et directement comparables entre elles. Il est vrai que nous possédons deux pendules, de forme et de construction entièrement différentes, dont les résultats ont été scrupuleusement comparés : ce sont le pendule de Borda et le pendule réversible de Kater. Mais, bien que l'accord remarquable des résultats obtenus par des procédés si différents mette en évidence le talent et l'habileté des savants éminents à qui nous devons ces expériences, il ne faut pas oublier que la réduction au vide a été faite, dans les deux cas, suivant l'ancienne formule, et que, depuis les importantes recherches de M. Bessel sur ce sujet, qui ont montré la nécessité de reviser les calculs de toutes les expériences antérieures, on n'a jamais repris une comparaison sérieuse des résultats des deux pendules. La valeur de la correction additionnelle est en réalité différente pour les deux cas, comme je le démontrerai amplement dans la suite, si bien qu'en fait, nous ignorons entièrement aujourd'hui si les résultats de deux quelconques des pendules qui ont été construits et expérimentés sont l'un avec l'autre en strict et raisonnable accord. Et tant que cet accord ne sera pas pratiquement obtenu, et ne pourra être pratiquement répété, je ne pense pas qu'on soit en droit de considérer la vraie longueur du pendule à secondes comme déterminée d'une façon satisfaisante.

Réduction au vide.

M. Bessel a montré, dans son très intéressant travail sur le pendule [1], que la formule usitée pour la réduction au vide, en ce qui regarde le poids spécifique du *corps en mouvement*, est très défectueuse et ne représente nullement la valeur totale de la correction qui devrait être appliquée ; qu'en fait, une certaine

---

[1] *Recherches sur la longueur du pendule simple qui bat la seconde*, t. IV de ce Recueil, p. 124.

quantité d'air, variable avec la forme et la construction du pendule, est mise en mouvement en même temps que lui et y adhère, formant ainsi avec lui un *pendule composé* dont le poids spécifique est beaucoup moindre que celui du métal lui-même. « Si l'on désigne, dit-il à la page 155, par m la masse du corps qui se meut dans un fluide, par m' celle du fluide qu'il déplace, on a pris, depuis Newton, pour valeur de la force accélératrice qui agit sur le corps,

$$\frac{m - m'}{m},$$

et c'est avec cette formule qu'on a toujours réduit les expériences du pendule. L'adoption de cette valeur est fondée sur cette hypothèse que la force motrice à laquelle le corps est soumis, et qui est égale à $m - m'$, se répartit sur la masse qui constitue le corps. Mais, en réalité, elle se répartit non seulement sur cette masse, mais aussi sur toutes les particules qui sont mises en mouvement en même temps que le corps : donc aussi sur les portions du fluide qui sont entraînées ; par suite, le dénominateur de la formule qui représente la force accélératrice est nécessairement plus grand que m. »

M. Bessel entre ensuite dans la discussion mathématique des principes d'après lesquels il calcule les résultats de ses expériences, et finalement il arrive à l'importante conclusion que voici : un fluide de faible densité, dans lequel oscille un pendule, n'influe sur la durée des oscillations qu'en diminuant la pesanteur du corps et en augmentant son moment d'inertie. Si l'accroissement du mouvement du fluide est proportionnel à l'arc d'oscillation du pendule, l'augmentation du moment d'inertie est à très peu près constante ; dans tous les autres cas, il dépendrait de la grandeur de cet arc.

La conséquence évidente de ces expériences et de ces recherches est que la valeur de la correction ne varie pas seulement avec la *longueur*, la *grandeur*, le *poids*, la *densité* et la *forme* du pendule, mais aussi que, dans le cas du pendule réversible (sauf peut-être dans le cas très particulier où il fait le plus petit nombre possible d'oscillations), la correction ne peut être la même pour les oscillations sur les deux couteaux ; et, par conséquent, qu'un pendule, qui a été rendu réversible dans l'air, ne

l'est plus quand il est expérimenté dans le vide. Il devient donc de grande importance de déterminer, d'après ce nouveau principe, la valeur de la correction qu'on doit appliquer aux pendules de diverses formes employés par les différents expérimentateurs, pour que leurs résultats puissent être rigoureusement comparables. La valeur de la correction ne peut néanmoins, dans l'état actuel de nos connaissances, être déterminée par le calcul ; il faut, dans chaque cas, la déduire de l'expérience même. La méthode la plus directe paraît être, comme le dit M. Bessel (p. 160), de faire osciller le pendule dans le vide, bien que lui-même, en raison de quelques doutes qu'il concevait sur cette méthode, mais sur lesquels il ne s'est pas expliqué, ait adopté un autre plan très différent.

M. Bessel a employé deux modes de détermination. Le premier et le principal consistait à faire osciller dans l'air deux boules de même diamètre, 2,14 pouces anglais environ, mais de poids spécifiques très différents, l'une de laiton et l'autre d'ivoire, en les suspendant à un fil d'acier très fin. L'autre méthode, qu'il n'employa que l'année suivante, était de faire osciller la même boule de laiton successivement dans l'air et dans l'eau. Le résultat des expériences faites par ces deux méthodes fit voir que la correction ordinaire pour la réduction au vide était beaucoup trop faible, et que sa valeur vraie était presque double de celle qu'on adoptait généralement. La première méthode donna 1,946, la seconde 1,625, pour le *facteur* par lequel il fallait multiplier l'ancienne correction pour obtenir la correction vraie (¹). Ces valeurs diffèrent en réalité sensiblement l'une de l'autre ; M. Bessel préfère la première, ses recherches étant fondées sur la supposition que les oscillations s'exécutent dans un milieu de très faible densité (²).

(¹) Dans un Mémoire inséré postérieurement dans les *Astronomische Nachrichten* (*voir* la traduction de ce Mémoire, p. 126 de ce Volume), M. Bessel a porté la valeur de ce facteur à 1,956.

(²) M. Bessel a fait osciller aussi un cylindre creux de laiton alternativement dans l'air et dans l'eau, et a déduit de ses expériences des résultats qui semblent fort étonnants. Je ferai voir dans la suite que la discordance constatée par lui dans ces résultats disparaît si l'on admet pour le corps en mouvement une gravité spécifique différente de celle qu'il a adoptée.

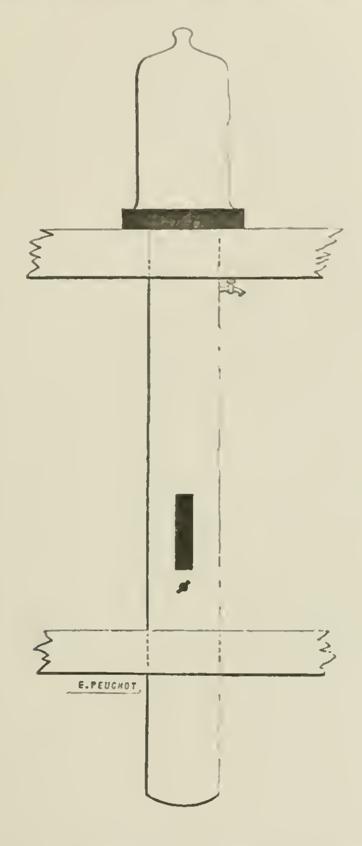
Désireux d'obtenir, par un procédé différent, la valeur vraie de la correction pour les pendules nombreux et variés que je possède, avec toute l'exactitude que permet ce genre d'expériences, et considérant que le sujet est d'ailleurs très important au point de vue scientifique, je décidai de consacrer quelque temps à son examen, et, dans ce but, je fis construire un appareil pour observer dans le vide, que je fis installer dans ma propre maison, afin d'y poursuivre mes études tout à loisir. Cette machine est très différente, dans sa forme et dans sa construction, de celle qui existe à l'Observatoire Royal de Greenwich et que le capitaine Sabine a décrite dans les *Transactions philosophiques* de 1829 (¹). Elle est formée d'un tube cylindrique de laiton d'environ cinq pieds de long ($1^m,524$) et six pouces et demi de diamètre ($0^m,165$), fermé au bas par un fond arrondi, et soudé par le haut à un support de fer très épais, sur lequel reposent les plans d'agate. Le support est solidement attaché par des vis à de fortes poutres d'acajou, encastrées dans des murs de 14 pouces ($0^m,355$) qui forment le coin d'une chambre, remarquable par la constance de la température qu'elle conserve pendant le jour, aux différentes saisons de l'année. La surface supérieure du support en fer est polie, parfaitement plane, et est surmontée d'une cloche en verre mobile, comme dans l'appareil du capitaine Sabine. Le tube de laiton présente deux petites ouvertures ou fenêtres opposées l'une à l'autre, percées à une distance convenable du sommet et fermées par des plaques de verre, pour permettre l'observation de l'amplitude des oscillations et de leurs coïncidences avec une horloge placée en arrière. La partie inférieure du cylindre est assujettie par des madriers croisés, afin d'éviter tout mouvement latéral du tube lui-même, pendant les oscillations du pendule. Comme toutes les expériences dont j'ai à parler sont seulement *comparatives*, il serait inutile d'entrer dans de plus grands détails sur la description de cet appareil, dont la forme et la construction sont suffisamment indiquées par le croquis ci-contre. Le tuyau métallique flexible, qui établit la communication avec la pompe à air, s'ouvre dans le cylindre immédiatement au-dessous des madriers supérieurs ; une tige de laiton, destinée à écarter le pendule

---

(¹) *Voir* p. 135 de ce Volume.

d'un angle donné de la verticale, pénètre dans le cylindre à travers une boîte à étoupes juste au-dessous de la fenêtre antérieure.

Je dois cependant mentionner ici que les plans d'agate ne sont pas, comme dans les expériences du capitaine Sabine, *vissés* au support en fer, mais attachés à un autre support en cuivre de



trois quarts de pouce d'épaisseur et muni de trois vis calantes pour assurer le nivellement des plans. Ces vis reposent simplement sur la plaque de fer, l'une dans une crapaudine, la deuxième dans une rainure et la troisième sur la surface plane de la plaque ; de la sorte, les plans d'agate sont toujours maintenus dans la même position, bien qu'affranchis de toute contrainte des vis. Je crois que cette disposition, qui m'a été suggérée par M. Troughton, donne autant de sécurité que lorsque les plans d'agate sont direc-

tement vissés au support en fer; et, en effet, l'application du pendule renversé de M. Hardy ne fait pas découvrir le moindre mouvement. Mais c'est là une question qui n'a pas besoin d'être discutée ici, puisque, comme je viens de le faire remarquer, les expériences dont je vais parler sont purement comparatives. Le poids du support en cuivre est de plus de 17 livres troy et un quart (6438gr,4).

La correction ordinaire du nombre d'oscillations pour la réduction au vide a été, jusqu'à présent, déduite des poids relatifs de l'air et du pendule au moyen de la formule suivante (¹)

$$+N\frac{1}{2\left(\frac{S}{\sigma}-1\right)}\frac{\beta'}{\beta[1+\mu(\tau'-t)]}\frac{1}{1+\alpha(t'-t)},$$

dans laquelle N est le nombre de vibrations exécutées par le pendule en un jour solaire moyen, S le poids spécifique du pendule, σ celui de l'air, μ la dilatation du mercure et α celle de l'air pour un degré du thermomètre, β' la hauteur barométrique, τ' la température du mercure, t' celle de l'air pendant les expériences, β la hauteur barométrique normale et t la température normale de l'air auxquelles se rapportent les poids spécifiques.

Si l'on suppose que la température du mercure du baromètre est la même que celle de l'air qui environne le pendule, supposition généralement admissible dans les expériences de ce genre, sans qu'il y ait à craindre d'erreur sensible, la formule se ramène à la forme beaucoup plus commode

$$(1)\qquad +N\frac{1}{2\left(\frac{S}{\sigma}-1\right)}\frac{\beta'}{\beta}\frac{1}{1+(\alpha+\mu)(t'-t)}.$$

Mais il convient de remarquer ici que S ne désigne pas le poids spécifique du pendule déterminé à la manière ordinaire pour le pendule au repos, à moins que la masse n'en soit homogène; car, dans tous les autres cas où le pendule est composé de diverses parties dont les poids spécifiques sont différents, le *poids spécifique d'oscillation* de la masse doit se calculer de la manière

(¹) *Voir* le Mémoire de M. Mathieu sur ce sujet, dans la *Connaissance des Temps pour* 1828, p. 288.

suivante. Désignons par d', d'', d''', ... la distance à l'axe de suspension du centre de gravité de chaque corps respectivement ([1]), par w', w'', w''', ... le poids dans l'air de chacun des corps, par s', s'', s''', ... leur poids spécifique déterminé à la manière ordinaire. Le *poids spécifique d'oscillation* du pendule est alors

$$(2) \qquad S = \frac{w' d' + w'' d'' + w''' d''' + \ldots}{\frac{w' d'}{s'} + \frac{w'' d''}{s''} + \frac{w''' d'''}{s'''} + \ldots}.$$

C'est de cette manière que j'ai calculé ce qu'on peut appeler le *poids spécifique d'oscillation* pour tous les pendules qui, dans les expériences suivantes, sont formés de matières de poids spécifiques différents ([2]).

Quant aux autres quantités qui entrent dans la formule (1), on a employé deux manières de les exprimer numériquement, suivant qu'on adopte la détermination de Sir George Shuckburgh pour les poids relatifs de l'air et de l'eau, telle qu'il l'a donnée dans les *Transactions philosophiques* de 1777, savoir $\sigma = \frac{1}{836}$, $\beta = 29,27$ ($743^{mm},4$) et $t = 53°F.$, ou la détermination plus récente de Biot et Arago, $\sigma = \frac{1}{770}$, $\beta = 29,9218$ ($760^{mm},0$) et $t = 32°F.$ La première a été adoptée, je crois, par la plupart des expérimentateurs anglais; mais comme je crois la dernière plus exacte, c'est elle que j'adopterai dans toutes les présentes réductions. Leur différence est à peu près de $\frac{1}{95}$ de la correction totale, le résultat des savants français étant le plus grand des deux.

On prend généralement la dilatation du mercure égale à 0,0001 pour chaque degré du thermomètre de Fahrenheit; mais on s'accorde moins sur la valeur de la dilatation de l'air. On adopte généralement $\frac{1}{480}$ ou 0,002083 pour un degré Fahrenheit; mais cette valeur s'applique particulièrement à l'air supposé parfaitement sec, tel qu'on l'a employé dans les déterminations d'où cette valeur a été déduite. La dilatation de l'air atmosphérique ordinaire, toujours imprégné d'une certaine quantité d'humidité,

---

([1]) Si le corps est au-dessous de l'axe, d est positif; il est négatif dans le cas contraire.

([2]) Je suis redevable de cette formule au professeur Airy; bien qu'elle soit de très grande importance dans toutes les recherches relatives au pendule, elle n'a été signalée, à ma connaissance, par aucun des auteurs qui ont écrit sur ce sujet, à l'exception de Bessel. (*Voir* t. IV de ce Recueil, p. 157.)

est prise par M. Laplace égale à $\frac{1}{450}$ de son volume, ou 0,002222 pour chaque degré [1]. C'est cette dernière valeur que j'ai adoptée, et j'ai fait en conséquence $(\alpha + \mu) = 0{,}0023$. Alors l'expression numérique de la formule en question devient

$$(3) \qquad + N \frac{1}{2(S.770 - 1)} \frac{\beta}{29{,}9218} \frac{1}{1 + 0{,}0023(t' - 32)}.$$

Si nous faisons $\beta = 1$ et $t' = 32°$, nous pouvons calculer aisément pour chaque pendule la quantité constante

$$(4) \qquad C = N \frac{0{,}0000217016}{S - 0{,}001299},$$

qui correspond à une pression atmosphérique d'un pouce et au degré de congélation de l'eau ; et alors la valeur de la correction pour toute autre pression β et toute autre température t sera donnée par la formule

$$(5) \qquad C \frac{\beta}{1 + 0{,}0023(t - 32)}.$$

Telle est la valeur de l'ancienne correction ; elle ne tient aucun compte de l'effet de l'air ambiant mis en mouvement par le pendule et qui le suit dans ses oscillations comme s'il y était adhérent ; et nous savons aujourd'hui que cet effet affecte très sensiblement les résultats. Cette formule, néanmoins, nous sera encore très utile, puisque non seulement les expériences de M. Bessel, mais aussi celles qui sont détaillées dans ce Mémoire, ont pour objet la détermination du *facteur*, variable avec la forme et la construction du pendule, par lequel la quantité C doit être multipliée pour donner la correction *vraie*. C'est là en effet l'une des formes les plus propres à mettre en évidence la valeur relative et la grandeur de la nouvelle influence. J'ai déjà dit que la méthode qu'on se proposait de suivre dans les expériences, pour déterminer ce facteur, était de faire osciller le pendule sous la pression totale de l'atmosphère, puis dans un milieu très raréfié, ne différant presque pas d'un vide parfait. Soit N' le nombre des oscillations exécutées par un pendule en un jour solaire moyen, corrigé à la manière ordinaire de la marche de la pendule, de l'amplitude de

---

(1) *Système du monde*, 5e édition, 1824, p. 89. *Voir* aussi BIOT, *Traité d'Astronomie physique*, t. III, *Mesures barométriques*, p. 14.

l'oscillation et de la température de la salle, mais non de la pression atmosphérique ; soient β' la hauteur du baromètre et t' le degré du thermomètre, lorsque le pendule oscille à l'air libre ; et soient N'', β'' et t'' les quantités correspondantes quand il oscille dans un milieu très raréfié. Alors $\frac{N'' - N'}{\beta' - \beta''}$ est l'expression de la correction vraie pour la pression d'un pouce de mercure à la température $t° = \frac{1}{2}(t' + t'')$. En multipliant cette expression par

$$1 + 0{,}0023(t° - 32),$$

on aura la *vraie constante*

$$C' = \frac{N'' - N'}{\beta' - \beta''}\left[1 + 0{,}0023(t° - 32)\right] \tag{6}$$

pour la même pression et pour la température de la glace fondante. On en déduit l'expression suivante de la correction *vraie* sous une pression β et à une température t

$$C' \frac{1}{1 + 0{,}0023(t - 32)}. \tag{7}$$

C'est cette formule qui m'a servi à calculer la valeur de C' dans toutes mes expériences.

Or la valeur de C' est toujours plus grande que celle de C ; et, pour déterminer le *facteur*, variable avec la forme et la construction du pendule, par lequel C doit être multiplié pour donner la correction vraie, il nous faut faire $C' = nC$, d'où nous tirons pour le facteur cherché

$$n = \frac{C'}{C}. \tag{8}$$

C'est de cette manière qu'on a obtenu la valeur du facteur n dans les expériences suivantes. Il convient de remarquer que la quantité que je désigne ici par n est celle que M. Bessel exprime par $(1 + k)$.

Description des pendules.

Le nombre des pendules que j'ai soumis aux expériences comparatives en les faisant osciller dans l'appareil s'élève à 41 [1].

---

[1] Ce nombre a été plus que doublé par les expériences dont je parlerai plus loin et qui ont été faites postérieurement à la lecture de ce Mémoire.

Ils diffèrent tous les uns des autres soit par la forme, les dimensions, le poids, la pesanteur spécifique, la longueur et le mode de suspension, soit par quelque autre caractère essentiel, de sorte que mes expériences portent à peu près sur toutes les variétés de pendules qu'on peut employer dans les observations. Afin de prévenir toute confusion dans la désignation de chacun d'eux, je vais leur donner des numéros d'ordre et les classer d'après leur forme.

Les n°s 1, 2, 3 et 4 sont des sphères de platine, de plomb, de laiton et d'ivoire, toutes de même diamètre, qui est d'un peu moins de 1 pouce et demi (38^{mm}). La sphère de platine (n° 1) m'a été obligeamment prêtée pour cette occasion par l'Astronome royal ; elle est de manufacture française et a environ 1,44 pouce (36^{mm},6) de diamètre ; elle est donc de même dimension que celle qu'a employée M. Biot dans ses expériences du pendule et, en fait, elle paraît avoir été construite sur le même modèle [1]. Elle est garnie d'une calotte de cuivre et accompagnée d'un couteau fixé à une monture qu'on peut amener, au moyen d'une vis, au synchronisme avec le pendule qui y est attaché, selon la méthode décrite par Borda dans la *Base du système métrique* (t. III, p. 338). J'ai trouvé son poids spécifique égal à 21,042, et elle pesait 8963 grains (580^{gr},8). La calotte de cuivre pesait 87 grains (5^{gr},6) et était fixement attachée à la boule de platine au moyen de gomme laque, le mode d'attache ordinaire, à l'aide d'un peu de graisse mise entre les parties à réunir, ne pouvant servir dans les conditions de l'expérience. Je l'avais essayé malheureusement dans la première expérience, ne me rappelant pas que l'adhérence est due principalement à la pression de l'atmosphère, et qu'une fois cette pression détruite la boule ne pourrait rester suspendue. C'est ce qui arriva, et la sphère de platine, dans sa chute, reçut une légère entaille en choquant les parois de l'appareil. Cette avarie heureusement n'est pas assez grave pour empêcher d'employer la boule à de futures expériences, et, en tout cas, elle ne peut affecter en rien les expériences actuelles purement comparatives. Le poids spécifique d'oscillation de la masse totale, comprenant le fil de fer dont je vais parler, est 20,745. La

---

(1) *Base du système métrique*, t. IV, p. 449.

sphère de plomb (n° 2), celle de laiton (n° 3) et celle d'ivoire (n° 4) devaient avoir la même dimension que celle de platine ; en réalité, elles sont un peu plus grosses, ayant 1,46 pouce (37^{mm},1) de diamètre. Elles n'ont pas de calotte, mais elles sont taraudées pour recevoir une vis de laiton, percée d'un petit trou dans lequel s'insère le fil auquel elles doivent être suspendues. La vis pesait 19 grains et demi (1^{gr},26) ; c'est la même vis qui a servi pour toutes les expériences où elle était nécessaire, excepté pour la boule de platine. Le fil employé dans ce cas et dans tous les autres, à moins qu'il ne soit fait expressément mention du contraire, était en fer, d'environ $\frac{1}{70}$ de pouce (0^{mm},36) de diamètre et pesait environ 11 grains (0^{gr},71) [1]. J'ai trouvé pour son poids spécifique 7,666. Je n'ai pas voulu me servir d'un fil plus fin, excepté pour la sphère d'ivoire, par crainte d'un accident auquel il n'eût pas été facile de remédier dans l'intérieur de l'appareil pneumatique. Dans toutes ces expériences, le fil métallique était attaché par son extrémité supérieure à la queue du couteau, dont la longueur était 1,55 pouce (39^{mm},37) ; et l'on avait toujours soin de rendre les oscillations de ce couteau synchrones de celles du pendule. Le poids spécifique de la sphère de plomb, y compris la vis en cuivre, était 11,250 et son poids 4648 grains (301^{gr},19) ; pour la boule de cuivre avec la vis, on avait 7,660 et 3217 grains (208^{gr}, 46), et pour celle d'ivoire, y compris la vis, 1,864 et 776 grains et demi (50^{gr},32) [2]. Mais, dans tous les cas où le pendule était formé de plusieurs métaux, ou même de deux pièces d'un même métal, mais de poids spécifiques différents, le poids spécifique d'*oscillation* de la masse a été calculé par la formule (2). Le fil qui servait à suspendre la boule d'ivoire était un fil d'argent, le

(1) Comme il a fallu, dans quelques cas, employer un autre morceau du même fil, je donne ici ce que je regarde comme le poids moyen.

(2) Je dois faire remarquer ici, une fois pour toutes, qu'en prenant les poids spécifiques des différentes substances dont il est parlé dans ce Mémoire, je me suis servi non d'eau distillée, mais d'eau de rivière filtrée et bouillie. Les valeurs déduites sont les résultats de deux, et quelquefois de trois pesées faites à des jours différents : elles sont bien suffisamment exactes pour les *comparaisons* que j'ai en vue. Elles sont toutes réduites au point de congélation de l'eau et à la pression de 29,9218 (760^{mm}).

plus fin qui pût supporter la boule avec toute sécurité; il pesait un peu plus d'un demi-grain ($0^{gr},032$). Comme ces trois sphères n'ont pas absolument le même diamètre, je les désignerai par le nom de *sphères d'un pouce et demi.*

Les nos 5, 6 et 7 sont des sphères de plomb (no 5), de cuivre (no 6) et d'ivoire (no 7); elles devaient avoir toutes le même diamètre, 2,06 pouces ($52^{mm},3$), qui est celui des boules dont s'est servi M. Bessel (1). Ces boules sont taraudées pour recevoir la même vis dont j'ai déjà parlé, et l'on s'est servi avec elles du même couteau et du même fil que pour les boules précédentes. J'ai trouvé le poids spécifique de la sphère de plomb avec la vis égal à 11,281. le poids était 13019 grains ($843^{gr},62$); la sphère de cuivre avec la vis pesait 9302 grains ($602^{gr},76$) et avait pour densité 7,995; enfin, la sphère d'ivoire avec la vis en cuivre avait pour poids $2066\frac{1}{2}$ grains ($133^{gr},91$), et pour densité 1,747. J'appellerai ces sphères les *sphères de 2 pouces.*

Les nos 8 et 9 sont les mêmes boules de plomb et d'ivoire que les nos 5 et 7; mais les oscillations, au lieu de se faire sur le tranchant d'un couteau, se font comme dans quelques-unes des expériences de M. Bessel, le fil passant sur un cylindre d'acier d'environ $\frac{1}{15}$ de pouce de diamètre ($1^{mm},7$). Le fil employé avec la boule de plomb était le fil de fer des premières expériences; celui de la boule d'ivoire était un fil d'argent un peu plus fort que celui du no 4 et qui pesait 2 grains ($0^{gr},13$). Les expériences faites avec ces boules et ce mode de suspension ne sont peut-être pas, je le crains, très dignes de confiance; j'expliquerai les motifs de cette réserve.

Le no 10 est un cylindre plein en laiton, de 2,06 pouces ($52^{mm},3$) de diamètre et 2,06 pouces de hauteur; ses dimensions correspondent donc à celles de la sphère de même métal. Il était percé d'un trou taraudé sur une de ses bases, et était supporté par le même fil de fer et le

(1) C'est la dimension exacte de la figure de la sphère gravée dans le Mémoire de M. Bessel, où il est dit que cette figure donne les dimensions réelles; mais, en examinant ultérieurement les expériences, j'ai vu que la dimension vraie est 2,14 pouces ($54^{mm},4$). La planche s'est probablement contractée après le tirage.

même couteau dont nous avons déjà parlé. Sa densité, y compris la vis, était 8,174, son poids 14190 grains ($919^{gr},50$).

Le n° 11 est le même cylindre plein en laiton, mais le trou taraudé est percé sur sa surface circulaire; comme il était sujet à tourner sur son axe quand on le suspendait au fil de fer, je fus obligé de le supporter par une tige, formée d'un gros fil de laiton, de 0,185 pouce ($4^{mm},7$) de diamètre et de 37 ½ pouces ($952^{mm},5$) de long; l'extrémité supérieure en était fixée au même couteau dont il a été parlé plus haut, sur lequel oscillait tout l'ensemble. La tige pesait 2050 grains ($132^{gr},84$), sa densité était un peu supérieure à celle du cylindre. La densité calculée de l'ensemble était 8,202. Ce pendule était mis en mouvement de façon que l'axe du cylindre fût perpendiculaire au plan d'oscillation.

Le n° 12 est le même cylindre plein en laiton, suspendu à la même tige, comme dans le cas précédent, mais avec cette différence que l'axe du cylindre se trouvait dans le plan d'oscillation, qui était ainsi perpendiculaire aux bases planes.

Le n° 13 est encore le même cylindre de laiton, suspendu à la même tige de laiton, mais vissée cette fois sur une des bases, comme dans le n° 10; cette expérience avait pour but de déterminer la différence des résultats lorsque le cylindre était suspendu à la tige ou au fil de fer. C'est ce pendule que représente la figure ci-dessus.

Le n° 14 est un cylindre de plomb, de 2,06 pouces ($52^{mm},3$) de diamètre et de 4 pouces de long ($101^{mm},6$); un trou est taraudé au centre d'une de ses bases, et il est suspendu au même fil de fer et au même couteau dont il a été parlé. Il faut dire cependant que ce cylindre n'était pas uniquement en plomb; c'était, en réalité, un tube mince de laiton rempli avec du plomb, qui pouvait entrer dans une enveloppe cylindrique de laiton, ayant les dimensions indiquées, comme il va être plus amplement expliqué dans l'article suivant. J'ai trouvé pour densité de l'ensemble 10,237; le poids en était 34500 grains ($2235^{gr},56$).

Les n°s 15, 16, 17 et 18 sont des tubes cylindriques en laiton, de 2,06 pouces ($52^{mm},3$) de diamètre extérieur, de 4 pouces de long ($101^{mm},6$) et de 0,13 pouce ($3^{mm},3$) d'épaisseur.

En réalité, ce ne sont pas quatre tubes différents, mais une seule et même enveloppe cylindrique, celle dans laquelle peut s'introduire le cylindre de plomb de l'article précédent. On peut modifier cette enveloppe cylindrique de quatre façons, au moyen d'un tube qui glisse dans son intérieur. Le n° 15 représente cette enveloppe ouverte aux deux bouts, sauf une mince pièce en croix fixée au sommet, au centre de laquelle est fixée la vis. Le n° 16 est cette même enveloppe ouverte en haut et fermée par le bas. Dans le n° 17, elle est fermée par le haut, ouverte en bas. Enfin, dans le n° 18, les deux bouts sont fermés. Dans tous les cas, le tube était suspendu au même fil de fer dont il a été parlé et au même couteau. La densité du métal a été trouvée de 8,453; mais il convient de remarquer ici, et j'y reviendrai dans la suite, que lorsqu'on fait osciller un corps *creux* comme pendule, on doit faire entrer en ligne de compte la quantité d'air contenu dans l'intérieur du corps en mouvement, pour laquelle le calcul donne 3,050 grains ($0^{gr},198$), et diminuer en conséquence le poids spécifique du métal [1]. Partant de ce principe, j'ai calculé les densités de chacun des pendules creux et trouvé les nombres suivants, auxquels je joins les poids eux-mêmes :

	Densité.	Poids.
N° 15...........	2,536	8497 grains
N° 16...........	2,623	8922 »
N° 17...........	2,561	8622 »
N° 18...........	2,640	9048 »

Après avoir terminé les expériences sur ces tubes, je fis remplir de plomb le tube qui glissait dans l'intérieur, ainsi que je l'ai dit précédemment; ce cylindre plein pouvait donc à volonté être introduit dans l'enveloppe ou en être retiré. Et après avoir fait les

(1) Il faut, dans les problèmes de ce genre, distinguer deux cas : l'un, où le corps creux est hermétiquement clos; l'autre, où l'air inclus communique librement avec l'atmosphère environnante et, par conséquent, est enlevé par l'action de la pompe à air. Mais, dans le cas d'un tube cylindrique, tel que celui dont il est question, il n'y a pas de différence dans le résultat; car, en raison de la similitude de distribution des masses de métal et d'air, exacte dans le cas du tube ouvert aux deux bouts, très approchée au moins dans les autres cas, le centre d'oscillation de l'air inclus coïncide avec celui du métal, et, par suite, le centre d'oscillation de la masse composée coïncide aussi avec celui du métal seul.

expériences avec ce cylindre solide, je fis fermer le haut du tube extérieur par une nouvelle pièce exactement soudée; on lui fit aussi un fond qui pouvait s'y visser ou se dévisser; en interposant un cuir gras, on obtenait une fermeture hermétique.

Le n° 19 est le tube ainsi hermétiquement clos. Le tube intérieur qui y coulissait étant enlevé, le poids se trouva réduit à 7250 grains ($469^{gr},79$); j'ai trouvé pour densité 2,233 [1]. La cavité du cylindre contient maintenant 3,255 grains d'air ($0^{gr},211$).

Le n° 20 est une lentille de plomb de 2,06 pouces ($52^{mm},3$) de diamètre, de 1 pouce ($25^{mm},4$) d'épaisseur au centre, et terminée par une surface cylindrique d'environ $\frac{1}{4}$ de pouce de largeur. Cette lentille était percée d'un trou taraudé au milieu d'une de ses faces bombées, et elle était suspendue au même fil de fer et au même couteau dont j'ai déjà parlé; la position de la lentille était donc horizontale. Sa densité, y compris la vis, était 11,254; le tout pesait 6505 grains ($421^{gr},52$).

Le n° 21 est une tige de cuivre pleine et cylindrique, de 0,41 pouce ($10^{mm},4$) de diamètre, et longue de 58,8 pouces ($1493^{mm},5$). Ce pendule a été inventé par M. Troughton et construit par lui il y a seize ans à peu près, lors de la nomination par le Gouvernement d'une Commission chargée de déterminer la longueur du pendule à secondes [2]. Il n'entre pas dans mon sujet de décrire le mode de suspension qui devait, à l'origine, être adapté à cette tige pour la mettre en oscillation; d'ailleurs, on a pu se dispenser d'employer une grande partie de l'appareil dans les expériences actuelles, qui ne devaient être que comparatives. Je dirai donc seulement que j'ai d'abord essayé de la mettre en oscillation en la suspendant par

---

[1] Lorsque le fond du tube était vissé lâche, de manière à donner libre passage à l'air quand on faisait le vide dans le récipient, on pouvait considérer ce pendule comme semblable au n° 18, avec une densité de 2,233; et, si le fond était enlevé, on avait un pendule semblable au n° 17. Les expériences faites avec le tube dans ces deux conditions, et dont je parlerai plus loin, ont complètement confirmé les résultats donnés par les n°s 17 et 18. Dans le dernier cas, le fond étant enlevé, le poids se trouvait réduit à 6744 grains (437^{gr}), et le calcul donne pour densité 2,042. Le cylindre plein a été aussi modifié pour pouvoir remplir le tube fermé aux deux bouts; mais je n'en ai pas fait usage jusqu'à présent.

[2] *Voir*, à ce sujet, le Mémoire de H. Kater, t. IV de ce Recueil, au bas de la page 77. (C. W.)

un de ses bouts à un morceau de fil d'acier passant sur le cylindre, dont j'ai parlé à propos des nos 8 et 9. Mais je trouvai des discordances (j'y reviendrai plus tard) tellement énormes que je fus obligé de renoncer à ce mode de suspension, et finalement je la fixai, à l'aide d'une vis, au couteau employé dans les expériences précédentes. Comme je n'avais pas les moyens de déterminer la densité de la tige, je l'ai supposée égale à celle de la barre de cuivre no 27, c'est-à-dire 8,629; le poids était de 16810 grains ($1089^{gr},27$).

Le no 22 est le pendule invariable de Kater, en laiton. Il a été construit plusieurs pendules de cette espèce pour notre Gouvernement et pour d'autres, et aussi pour des Sociétés publiques; tous sont du même modèle, que le capitaine Kater a décrit dans les *Transactions philosophiques* de 1819, page 341. J'en ai actuellement deux en ma possession, les nos 10 et 11, qui appartiennent à l'Amirauté; ce sont ceux qui ont servi au capitaine Foster, mort si déplorablement au cours de ses voyages d'expériences (1). Ils sont formés d'une barre de cuivre de 1,8 pouce de large ($45^{mm},7$) et d'un peu moins de $\frac{1}{10}$ de pouce ($2^{mm},54$) d'épaisseur. Au sommet de cette barre est une équerre, également en laiton, d'environ $\frac{3}{10}$ de pouce ($7^{mm},6$) d'épaisseur, à laquelle est vissé fortement un couteau d'acier; et à $40\frac{1}{2}$ pouces ($1028^{mm},7$) environ de l'arête de ce couteau, est fixé un disque circulaire plat, de cuivre plein, d'environ 6 pouces ($152^{mm},4$) de diamètre et $1\frac{1}{2}$ pouce ($38^{mm},1$) d'épaisseur, mais terminé sur son contour par une arête aiguë. Au-dessous de ce disque, la barre est réduite à environ $\frac{7}{10}$ de pouce ($17^{mm},8$) de largeur et est prolongée d'environ $16\frac{1}{2}$ pouces ($419^{mm},1$), formant ainsi une queue, appendice inutile et incommode : car l'amplitude de l'oscillation, à l'observation de laquelle cette queue était destinée, peut tout aussi bien être déterminée à l'aide de l'arête de la barre au-dessus de la lentille. Comme mon appareil pour l'observation dans le vide n'était pas assez large pour recevoir le disque de ce pendule, j'adopterai les résultats des expériences faites par le capitaine Sabine, sur deux pendules semblables, avec l'appareil pneumatique de Greenwich, telles qu'elles sont décrites par lui dans les *Transactions philosophiques*

(1) *Voir* la *Bibliographie,* t. IV, FOSTER et BAILY, 1828-1831.

de 1829, page 255 ([1]). J'ai pris pour densité du pendule 8,4; le capitaine Kater dit que la densité du premier pendule de ce modèle qu'il a fait construire était 8,61 (*Transactions philosophiques* de 1819, page 354); mais ce nombre est plus fort que le poids spécifique d'aucun laiton que j'aie jamais rencontré, et plus fort, je crois, que celui des laitons usuels; il est aussi considérablement plus grand que la densité de son pendule réversible, mentionné dans l'article suivant, qui était formé de matériaux à peu près semblables et n'avait pour densité que 8,248. Le capitaine Sabine, s'appuyant sur cette seule expérience du capitaine Kater, a adopté 8,6 comme densité d'un pendule de cette espèce : les résultats que j'ai déduits de ses expériences ne s'accordent donc pas avec ceux qu'il a donnés lui-même, et il était nécessaire de noter ici la cause principale de cette divergence. J'estime que le poids de ce pendule était de 90 500 grains (5864^{gr},31), d'après la moyenne des poids des deux pendules semblables que je possède.

Tous les pendules dont il a été question jusqu'ici ne peuvent osciller que dans une seule position. J'arrive maintenant à ceux qui sont munis de deux ou plusieurs couteaux, et qui sont du genre appelé *pendule réversible*. Les couteaux de ces pendules, du moins de tous ceux que l'on a construits jusqu'ici, sont placés à des distances inégales du centre de gravité, et par suite le même pendule, quand il oscille sur le couteau le plus éloigné du centre de gravité, mettra en mouvement une autre quantité d'air, donnera donc, au point de vue qui nous occupe, un autre résultat que lorsque le pendule oscille sur l'autre couteau. Je considérerai donc ces deux modes de suspension, que je désignerai respectivement par A et B, comme formant deux pendules distincts et indépendants, A désignant le pendule suspendu sur le couteau le plus éloigné du centre de gravité, et B le pendule suspendu à l'autre couteau.

Les n°s 23 et 24 sont les deux couteaux A et B du pendule réversible de Kater, décrit par lui dans les *Transactions philosophiques* de 1818, page 37 ([2]). La première de ces lettres désigne le pendule quand le gros poids est en bas, et l'autre B, quand ce

([1]) *Voir* page 149 du présent Volume.
([2]) *Voir* tome IV de ce Recueil, page 77.

poids est en haut. Ce pendule, ayant été successivement modifié par le capitaine Sabine, nous fournit quatre résultats distincts et indépendants, d'après sa forme au moment des expériences : 1° avec les queues en bois de 17 pouces de long dont il était muni à l'origine; 2° avec ses queues réduites à la longueur de 6,4 pouces; 3° avec des queues en laiton de 7 pouces, au lieu des queues en bois; et 4° sans aucun semblable appendice, le petit poids curseur étant aussi enlevé. Dans ce dernier cas, il était ramené à peu près à la forme et aux dimensions du pendule invariable n° 22, sauf la pièce en forme de queue. Mon appareil pour observer dans le vide étant, je l'ai déjà dit, trop étroit pour recevoir un tel pendule, j'ai calculé les résultats d'après les expériences faites par le capitaine Sabine avec le même pendule, dans les différents états dont je viens de parler, telles qu'il en a donné le détail dans les *Transactions philosophiques* de 1829, page 331, et dans celles de 1831, page 415 (1). Quant à ce qui concerne les densités, je dois prendre celle qui se rapporte au premier cas, où le pendule était dans son état primitif, égale à 7,373, valeur donnée par le capitaine Kater dans les *Transactions philosophiques* de 1819, page 415. Mais c'est là le poids spécifique du corps *en repos,* pris à la manière ordinaire, et non le poids spécifique d'*oscillation* de la masse que l'on déduirait de la formule (2). Mais le Mémoire de Kater ne donne pas les poids de toutes les pièces, ni leurs distances à l'axe de suspension, et ces éléments ont été altérés dans les modifications successives qu'a subies le pendule; je n'ai donc aucun moyen de déterminer la grandeur de l'influence qu'aurait, sur les résultats, cette nouvelle manière de considérer les choses. Pour le second cas, où les queues en bois étaient raccourcies à 6,4 pouces, j'ai calculé le poids spécifique, en admettant que 7,373 était la valeur exacte dans le premier cas, et j'ai trouvé 7,909. Enfin, pour les deux autres cas, le pendule étant uniquement composé de laiton, j'ai calculé la densité d'après les données du capitaine Kater (*Transactions philosophiques* de 1819, p. 63), et je l'ai faite égale à 8,248. Le nombre de Kater est 8,469, mais je crains qu'il ne se soit glissé quelque erreur dans son calcul. Le poids du

(1) *Voir* la traduction du premier de ces deux Mémoires dans le présent Volume, p. 175.

pendule est quelque chose comme 66900 grains (4335gr,05) : mais il semble ici y avoir quelque confusion dans les pesées. Dans les *Transactions philosophiques* de 1818, il est dit, page 63, que le poids des parties métalliques seules est de 9,57 livres ; si l'on suppose qu'il s'agit de livres *avoirdupois*, ce sera 66990 grains troy (4340gr,88). Mais dans les *Transactions* de 1819, page 415, le poids de la totalité du pendule, y compris les queues en bois qui pesaient probablement 500 ou 600 grains, est évalué à 66904 grains seulement (4335gr,31).

Les nos 25 et 26 sont les deux couteaux A et B d'un pendule réversible formé d'une simple barre de laiton, de 2 pouces (50mm,8) de large, épaisse de $\frac{3}{8}$ de pouce (9mm,5) et longue de 62,2 pouces (1579mm,9). La forme et la construction de ce pendule sont clairement expliquées par le croquis ci-joint, emprunté à la description que j'ai donnée des deux pendules suivants dans le *Philosophical Magazine* d'août 1828, page 137. A 5 pouces (127mm,0) de l'un des bouts de la barre est placé l'un des couteaux (A), fixé à des équerres à la façon habituelle, et à 39,4 pouces (1000mm,7) de là est placé l'autre couteau (B). L'ajustement pour le synchronisme se fait d'abord grossièrement en limant l'une ou l'autre extrémité ; puis on obtient l'exactitude la plus parfaite au moyen d'une petite vis insérée vers l'extrémité B, dont on fait varier convenablement le poids. La densité de ces pendules, déterminée sur un morceau de laiton provenant de la même fonte, a été trouvée de 8,034 ; le poids en est de 121406 grains (7866gr,98).

Les nos 27 et 28 sont les couteaux A et B d'une barre de cuivre semblable à la précédente, excepté qu'elle a $\frac{1}{2}$ pouce (12mm,7) d'épaisseur et 62,5 pouces (1587mm,5) de long. Sa densité, obtenue comme pour le pendule précédent, est de 8,629, son poids 155750 grains (10092gr,44).

Les nos 29 et 30 sont les deux couteaux A et B d'une barre de fer semblable à celle de cuivre, sauf qu'elle est longue de 62,1 pouces (1577mm,3). Sa densité, déterminée comme précédemment, est 7,686 ; son poids 140547 grains (9107gr,30).

Les deux derniers pendules ont déjà été décrits par moi dans le *Philosophical Magazine* à l'endroit que j'ai cité. Ils appartiennent

à la Société Royale astronomique, et ce sont ceux qui ont été emportés par le capitaine Foster dans son dernier voyage scientifique.

Les n°s 31, 32, 33 et 34 sont les quatre couteaux A, B, C, D d'une barre de laiton semblable aux trois dernières, à cela près qu'elle a $\frac{3}{4}$ de pouce (19^{mm},05) d'épaisseur et 62 pouces (1574^{mm},8) de long. La disposition des couteaux se comprend aisément d'après le diagramme ci-joint, emprunté au *Philosophical Magazine* de février 1829, page 97, où ce pendule est plus amplement décrit. Il suffit ici de dire que les couteaux A et C sont rendus synchrones ou à peu près, et qu'il en est de même des couteaux B et D. Il suit de là que chaque couple devrait, après réductions convenables, donner le même résultat pour la longueur du pendule simple. J'ai signalé, au contraire, dans l'article que je viens de citer, les discordances qu'ils ont manifestées, et la question a été discutée dans trois Mémoires du capitaine Everest, de M. Gompertz et de M. Lubbock (1). La densité du pendule, déduite d'un morceau de métal de la même fonte, s'est trouvée de 8,060, et le poids de 231437 grains (14996^{gr},87).

A B C D

Les n°s 35, 36, 37 et 38 sont quatre des couteaux, ou plutôt des *plans* A, C, *a*, *c* d'un tube cylindrique, ou plus exactement d'un assemblage de tubes de laiton; le corps du pendule est formé, en effet, de sept tubes exactement emboîtés les uns dans les autres, de manière à ne former qu'un tout compact qui a l'apparence d'un solide unique ; l'épaisseur totale est de 0,13 pouce (3^{mm},3). Le diamètre extérieur est $\frac{1}{2}$ pouce (38^{mm},1), et la longueur 56 pouces (1422^{mm},4); les extrémités ne sont pas fermées. J'ai trouvé la densité du métal égale à 8,406, en pesant un morceau du tube lui-même;

(1) Dans le dernier de ces Mémoires, qui se trouve dans les *Transactions philosophiques de* 1830, page 201, M. Lubbock a étudié l'effet des erreurs de position des couteaux sur le nombre de vibrations d'un pendule donné. Il arrive à ce résultat que cette cause ne peut produire aucune erreur considérable, ni même appréciable, si l'artiste a employé les précautions les plus ordinaires pour fixer les couteaux dans la position convenable. J'attribue les discordances à des irrégularités soit de l'arête du couteau, soit des plans d'agate : c'est un point sur lequel je reviendrai plus particulièrement dans la suite.

mais, comme il faut tenir compte de l'air inclus, la densité diminuée du corps mobile, calculée conformément à ce qui a été dit page 200, est de 3,034. Le poids est de 81 047 grains (5251gr,76). Ce pendule est d'une construction toute différente de tout ce qui a été fait jusqu'à présent; au lieu d'être muni de couteaux dont les arêtes reposent sur des plans d'agate, il porte des plans d'acier qui oscillent sur un couple de couteaux en agate commun à tous ces plans. C'est donc le mode ordinaire de suspension renversé. Le pendule porte six plans, mais deux d'entre eux, B et *b*, n'ont jamais été employés, je ne parlerai donc que des quatre autres. A la distance de 4 pouces (101mm,6) de chacun des bouts du tube est placé l'un des plans, attaché à un collier de laiton fixé lui-même invariablement au tube. A la distance de 12 pouces (304mm,8) de chacun d'eux, du côté du milieu du tube, est placé un autre plan; il y en a donc quatre en tout. Les plans B et *b*, dont je ne tiens pas compte, sont fixés entre les deux autres couples, comme on le voit d'ailleurs dans le croquis ci-contre.

A
B
C
a
b
c

Les oscillations sur les plans A et *a* sont rendues synchrones ou à peu près, de même sur les plans C et *c*. La distance de chaque couple de plans synchrones est, aussi approximativement que possible, égale au yard étalon [1].

Telle est la liste complète des pendules que l'on a, jusqu'à présent, proposés ou adoptés dans les expériences; j'ai employé à peu près toutes les variétés que l'on a pu imaginer. Mais je n'ai pas négligé l'occasion qui se présentait de déterminer l'effet de la pression atmosphérique sur quelques-uns des balanciers d'horloge. Dans ces expériences spéciales, le pendule était suspendu par un ressort, comme il l'est dans l'horloge même. Je ne m'arrêterai pas à rechercher si, dans ce cas, les arcs d'oscillation décroissent en pro-

---

[1] J'ai omis de dire, en parlant des pendules nos 35 à 38, que les colliers d'acier fixés au tube, et sur lesquels oscille le pendule, sont divisés sur leur pourtour en 16 parties égales; ce qui détermine 8 diamètres différents autour desquels on peut faire osciller le pendule. J'ai fait faire aussi 3 paires de couteaux d'agate, dont les tranchants ont différents degrés de finesse, afin de m'assurer de l'influence qu'un pareil changement peut avoir sur le résultat. Mais jusqu'ici je n'ai fait aucune expérience dans ce but.

gression géométrique; car, les expériences ayant été faites, dans chaque cas, dans des conditions à peu près identiques, la loi du décroissement des amplitudes ne peut avoir sur les résultats comparatifs qu'une influence presque nulle.

Le n° 39 est un pendule à mercure, tel qu'on l'emploie généralement aujourd'hui dans les horloges astronomiques. Le pendule que j'ai employé à mes expériences est celui que M. Hardy devait mettre à l'excellente horloge qu'il venait de terminer pour Son Altesse Royale le Président de notre Société; c'est le premier qui ait jamais été soumis à une épreuve aussi sérieuse. Il est construit à la manière ordinaire et conforme au type que j'ai eu précédemment occasion de décrire [1], à cela près que la tige et les côtés de l'étrier ont un $\frac{1}{2}$ pouce de large, ce que je regarde comme un perfectionnement. Ces pièces sont rivées l'une à l'autre invariablement, et la construction est d'un fini tout à fait remarquable. La hauteur du mercure dans le cylindre de verre était, pendant mes expériences, de 6,8 pouces ($172^{mm},7$). On faisait osciller ce pendule, ainsi que je l'ai déjà dit, sur son propre ressort et non sur l'arête d'un couteau. Le poids du mercure était de 82960 grains ($5375^{gr},72$), celui du cylindre de verre de 6463 grains ($418^{gr},80$), et enfin le poids des pièces d'acier 13565 grains ($879^{gr},00$). J'ai trouvé pour densité du verre 3,300; j'ai pris celle du mercure égale à 13,586 et celle de l'acier égale à 7,800; le poids spécifique d'*oscillation* de la masse, calculé d'après la formule (2), était donc de 10,591.

Le n° 40 est un autre balancier d'horloge formé d'une tige cylindrique de sapin, d'environ $\frac{3}{8}$ de pouce ($9^{mm},5$) de diamètre, entourée en bas d'un cylindre de plomb de 1,8 pouce de diamètre et de 13,5 pouces de diamètre ($45^{mm},7$ et $342^{mm},9$); j'ai décrit un semblable pendule dans le Mémoire cité plus haut. J'ai pris pour densité du plomb 11,300; mais, en raison du trou cylindrique dont il est percé et de la tige de bois qui remplit ce trou, j'estime que le poids spécifique d'oscillation de la masse est de 11,113 seulement.

Le n° 41 est le même cylindre de plomb attaché à une tige plate en sapin, de 1 pouce de large et d'à peu près 0,14 pouce ($3^{mm},6$)

---

[1] *Mémoires de la Société astronomique de Londres*, t. I, p. 409; 1823.

d'épaisseur dans le milieu de sa largeur, mais taillée en biseau sur les bords. Le trou cylindrique était, comme dans le cas précédent, complètement rempli par la tige, qu'on avait, dans ce but, travaillée en cylindre dans le bas, afin d'éviter la présence de l'air, qui autrement serait resté dans le cylindre de plomb et en aurait modifié la densité. La pesanteur spécifique d'oscillation de la masse est donc la même que dans le cas précédent, et le pendule était aussi suspendu au même ressort. On le fit osciller dans le plan des deux biseaux. Le poids du cylindre de plomb était de 93884 grains (6083gr,58).

Résultats des expériences.

Après avoir ainsi donné la description des divers pendules employés dans mes expériences, je passe maintenant à l'exposé des résultats que m'a donnés chacun d'eux, en les classant en plusieurs séries d'après la forme et la construction du pendule. Je dois faire remarquer ici que le nombre annexé à chaque résultat désigne le numéro de l'expérience, telle qu'elle est donnée par ordre numérique dans l'*Appendice* placé à la suite de ce Mémoire. C'est là qu'on trouvera en détail toutes les données nécessaires au calcul du résultat ; il m'a semblé préférable de les rejeter ainsi toutes à la fin, plutôt que d'interrompre à chaque instant la partie descriptive de ce Mémoire. Je dois aussi avertir que, dans la conduite de ces expériences comparatives, je les ai toujours faites par *couples,* le *même jour* et en les faisant se succéder *immédiatement* l'une à l'autre ; grâce à cette précaution, j'évitais en grande partie les discordances qui pouvaient résulter d'une variation dans la température de la salle ou dans la marche de la pendule. De même, lorsque je continuais la série, j'avais le soin d'intervertir l'ordre des expériences, me donnant par là une nouvelle chance d'éliminer toute erreur provenant d'une variation progressive, très lente, et par suite non perceptible, soit de la marche de l'horloge, soit de la température de la salle. Ainsi, lorsqu'il a été fait quatre expériences de suite, et c'est le plus petit nombre qu'on ait employé, je faisais osciller le pendule d'abord dans l'air ; puis, après avoir pompé l'air et laissé à la température, que cette opé-

ration fait nécessairement varier, le temps de s'égaliser, j'observais une seconde série dans le vide, sans avoir touché à aucune des pièces de l'appareil. Après cette deuxième série, toute chose restant en place, sans déranger ni toucher aucune partie de l'appareil, je faisais immédiatement une troisième série dans le vide ; puis, après avoir laissé rentrer l'air et avoir attendu quelque temps, sans rien déranger d'ailleurs, je faisais une quatrième série à l'air libre. C'est cette dernière que l'on compare à la précédente, et l'on obtient ainsi une deuxième comparaison. Ces quatre expériences, ainsi comparées deux à deux, donnent deux résultats, qui, en général, suffisent à déterminer la quantité cherchée. Mais il m'est arrivé souvent de répéter l'expérience et de faire quatre autres séries consécutives : dans ce cas, j'enlevais ordinairement la cloche de verre avant la reprise, et je retournais le couteau bout pour bout, pour un motif que j'expliquerai plus en détail dans la suite, et je conduisais la nouvelle série exactement comme la première. En général, on a fait partir le pendule autant que possible sous la même amplitude, et l'expérience a été prolongée à peu près pendant le même temps. Bref, je me suis efforcé, autant que je le pouvais, de faire chaque couple d'expériences qui sont comparées l'une à l'autre aussi exactement que possible dans les *mêmes conditions*, afin d'éviter toute chance d'erreur ou de divergence provenant de quelque cause imprévue [1].

PREMIÈRE SÉRIE.

Résultats obtenus avec les boules de 1 *pouce et demi.*

(1) Platine.		(2) Plomb.		(3) Laiton.		(4) Ivoire.	
Exp.	*n*.	Exp.	*n*.	Exp.	*n*.	Exp.	*n*.
1-2...	1,873	17-18...	1,896	9-10...	1,819	25-26...	1,879
3-4...	1,883	19-20...	1,909	11-12...	1,817	27-28...	1,864
5-6...	1,866	21-22...	1,840	13-14...	1,849	29-30...	1,858
7-8...	1,904	23-24...	1,840	15-16...	1,849	31-32...	1,886
Moy.	1,881		1,871		1,834		1,872

[1] Ces remarques s'appliquent particulièrement aux expériences faites récemment pour le but spécial de mes recherches actuelles. D'autres expériences, faites dans les années antérieures, qui n'avaient pas pour but le même sujet, ont été extraites de mes registres d'observation, dans l'ordre où elles ont été faites.

Les résultats obtenus avec ces divers pendules s'accordent bien entre eux, à l'exception du pendule de laiton ; ils semblent montrer que, pour des pendules de même longueur et de construction semblable, le facteur de la correction additionnelle dépend de la *forme* et de la *grandeur* du corps en mouvement, mais n'est pas influencé par son poids ou sa gravité spécifique. La moyenne de toutes les déterminations donne 1,864 (¹). Je ne sais à quoi attribuer la discordance des résultats donnés par la boule de laiton, à moins qu'elle ne se trouve dans la détermination du poids spécifique, qui est certainement moindre que celui d'aucun semblable métal que j'aie examiné. Elle n'est que 7,660 d'après la moyenne de trois pesées faites à des jours différents et qui s'accordent bien ensemble. Si l'on prenait la densité égale à 7,8 ou 7,9, nombre encore faible, le résultat que donne ce pendule s'accorderait avec les autres ; mais l'expérience ne me permet pas de prendre plus de 7,67 (²).

(¹) Il y a dans ces résultats des coïncidences et des discordances singulières qui, bien que légères, méritent quelque attention. Par exemple, dans les expériences avec la sphère de plomb, les nᵒˢ 17-20 sont presque identiques ; de même, les nᵒˢ 21-24 ; mais le résultat de ces derniers diffère du premier. Ainsi encore, dans les expériences sur la boule de laiton, les nᵒˢ 9-12 sont presque identiques, de même aussi les nᵒˢ 13-16 ; mais ceux-ci diffèrent des premiers. Ce sont là des anomalies légères, et il en est d'autres encore dont il m'est impossible de donner une explication satisfaisante.

(²) Quelques personnes ont supposé que si la boule avait été graissée, le résultat aurait pu être modifié ; si cela est, la discordance qui se présente ici pourrait avoir pour cause quelque accident de ce genre. Il est probable aussi que les résultats peuvent varier avec l'état d'humidité ou de sécheresse de l'air ou par d'autres causes inconnues. Cette question ouvre certainement à l'expérience un vaste champ d'exploration ; mais je n'ai pas actuellement le loisir de me livrer à ce travail. Je soupçonne cependant que la cause véritable de la discordance dont il s'agit pourrait être l'existence, indiquée par la faiblesse de la densité de la boule, de cavités internes qui seraient en communication avec le trou de vis, et d'où l'air pourrait ainsi s'échapper quand on fait le vide. Il serait difficile de tenir compte de cette circonstance dans le calcul ; mais elle aurait certainement un effet appréciable sur le résultat.

DEUXIÈME SÉRIE.

Résultats obtenus avec les boules de 2 pouces.

Le fil attaché au couteau.

(5) Plomb.		(6) Laiton.		(7) Ivoire.	
Exp.	*n.*	Exp.	*n.*	Exp.	*n.*
49-50.....	1,764	33-34.....	1,736	41-42.....	1,752
51-52.....	1,732	35-36.....	1,732	43-44.....	1,759
53-54.....	1,717	37-38.....	1,770	45-46.....	1,762
55-56.....	1,739	39-40.....	1,767	47-48.....	1,748
Moyenne.	1,738		1,751		1,755

Le fil passant sur le cylindre.

(8) Plomb.		(9) Ivoire.	
Exp.	*n.*	Exp.	*n.*
61-62.....	1,811	57-58.....	1,760
63-64.....	1,682	59-60.....	1,722
Moyenne.	1,746		1,741

Si l'on rejette les résultats des expériences faites avec le cylindre, auxquels on ne peut accorder aucune confiance, comme je le montrerai plus tard, on a pour moyenne des autres 1,748 ; cette valeur confirme la remarque qui vient d'être faite, que le facteur de la correction additionnelle, pour des pendules de même longueur et de même construction, paraît dépendre de la forme et de la grandeur du corps en mouvement, mais n'est pas affecté par son poids ou sa densité. Ce résultat, sans doute, ne s'accorde pas avec celui que M. Bessel a déduit de ses expériences sur des boules de laiton et d'ivoire, à peu près de même dimension que les miennes ; il donne pour ce facteur la valeur 1,946 (¹). Les expériences de M. Bessel paraissent avoir été conduites avec un très grand soin, et avec toute l'exactitude et le talent magistral qui distinguent cet éminent observateur. Cependant je dois dire que j'ai revu avec le plus grand soin toutes mes expériences, sans pouvoir y découvrir aucune cause d'erreur ; et, en fait, le résultat général est corroboré par l'uniformité des résultats de mes expé-

(¹) *Voir* la note (¹) au bas de la page 189.

riences sur les autres pendules. La raison de cette divergence reste donc à chercher. Dans toutes ses expériences, M. Bessel a fait usage de deux fils de longueurs différentes, l'un ayant à peu près la longueur du pendule à secondes, l'autre plus long que le premier d'une toise de France exactement. En nombres ronds, c'étaient donc 39 pouces ($0^m,99$) et 116 pouces ($2^m,94$). La valeur qu'il en a déduite pour le facteur *n* semble être celle qu'il regarde comme commune aux deux pendules ; mais c'est peut-être une question de savoir si le même facteur convient à deux pendules de longueurs aussi différentes.

Troisième série.

Résultats obtenus avec le cylindre plein en laiton de 2 pouces.

Les bases du cylindre horizontales.

(10) Suspendu à un fil de fer.		(13) Suspendu à une tige de laiton.	
Exp.	*n*.	Exp.	*n*.
65-66	1,839	77-78	1,905
67-68	1,880	79-80	1,940
Moyenne.	1,860		1,922

Les bases du cylindre verticales.

(11) L'axe perpendiculaire au plan d'oscillation.		(12) L'axe dans le plan d'oscillation.	
Exp.	*n*.	Exp.	*n*.
69-70	1,912	73-74	1,954
71-72	1,928	75-76	1,946
Moyenne.	1,920		1,950

La différence des résultats obtenus avec les pendules 10 et 13 montre l'effet produit par la substitution de la tige de laiton au fil de fer ([1]). Les résultats donnés par les pendules 11

([1]) On pourrait inférer, avec quelque apparence de raison, de cette comparaison isolée, que, plus épais est le fil de suspension, plus grande est la valeur de *n*. Mais on verra par quelques expériences additionnelles, faites depuis la lecture de ce Mémoire et insérées à la suite, que ce n'est pas toujours le cas, et qu'on peut expliquer les résultats actuels par une hypothèse toute différente.

et 13 sont au contraire presque égaux, comme on devait le prévoir. La comparaison des valeurs données par les pendules 11 et 12 montre la différence qu'introduit la manière dont le pendule est mis en branle. Tout cet ensemble paraît bien d'accord avec la supposition que, pour des pendules de même longueur et de construction semblable, le facteur de la correction additionnelle dépend de la forme et de la grandeur du corps en mouvement.

Quatrième série.

Résultats obtenus avec le cylindre de 4 pouces.

Plein.		Creux.			
(14) Rempli de plomb.		(15) Les deux bouts ouverts.		(16) Le haut ouvert, le bas fermé.	
Exp.	*n.*	Exp.	*n.*	Exp.	*n.*
97- 98....	2,011	85-86.....	1,921	89-90.....	1,937
99-100....	2,052	87-88.....	1,929	91-92.....	1,943
Moyenne.	2,032		1,925		1,940

Creux.					
(17) Le haut fermé, le bas ouvert.		(18) Les deux bouts fermés.		(19) Hermétiquement clos.	
Exp.	*n.*	Exp.	*n.*	Exp.	*n.*
93-94.....	1,983	81-82.....	1,995	101-102...	2,055
95-96.....	1,968	83-84.....	2,006	103-104...	2,085
Moyenne.	1,975[1]		2,000[1]		2,070[1]

(1) Des expériences sur le cylindre fermé par le haut et ouvert en bas, puis fermé aux deux bouts, semblables à celles des pendules nos 17 et 18, ont été reprises après qu'on eut enlevé le tube qui coulissait à l'intérieur et qu'on eut fait souder une nouvelle pièce au sommet du cylindre extérieur, comme on l'a dit page 201. On a obtenu les résultats suivants :

	Le bas ouvert.	Les deux bouts fermés.
	1,977	2,111
	1,963	2,094
Moyenne....	1,970	2,102

qui s'accordent bien avec les précédents.

Je saisis l'occasion de dire qu'ayant des motifs de soupçonner que l'air avait pu s'échapper de l'intérieur du cylindre, dans l'expérience faite sur le pendule n° 19,

Il ressort de ces dernières expériences que l'influence de l'air ambiant sur le pendule en mouvement est la même, qu'une portion du pendule soit pleine ou creuse, pourvu qu'on tienne compte, dans le cas où le corps est creux, de la diminution de la gravité spécifique du pendule due à l'air qui y est renfermé. Il n'y a que peu ou point de différence, que la cavité soit hermétiquement close, ou que les bouts soient fermés lâche, de manière à permettre librement la communication de l'air intérieur à l'extérieur, pourvu qu'on ait soin, bien entendu, de calculer correctement dans tous les cas la gravité spécifique d'oscillation du corps. Si les deux extrémités du cylindre sont laissées ouvertes, l'influence de l'air semble la plus faible possible, comme le montre le pendule n° 15; cette influence croît quand on met en place l'un ou l'autre des fonds, comme dans les pendules n°s 16 et 17; ce qui semble montrer que la libre circulation laissée à l'air par l'enlèvement des deux fonds introduit une légère modification dans les résultats. Je dois faire remarquer que, sauf pour les n°s 14 et 19, les pesanteurs spécifiques des cylindres n'ont pu être déterminées par l'expérience, mais qu'on les a obtenues par le calcul, en supposant au volume intérieur du cylindre certaines valeurs qu'on n'a pu complètement vérifier. Néanmoins ces densités sont probablement très voisines de la vérité, et l'erreur qu'on a pu commettre dans le calcul n'est pas de nature à influencer matériellement les résultats comparatifs. La reprise de trois de ces expériences, que j'ai signalée dans la Note précédente, après que le cylindre eut été modifié et son volume intérieur calculé de nouveau, montre le degré de concordance qu'on peut obtenir dans ces expériences.

Si l'on compare les résultats de mes expériences sur ces cylindres creux avec ceux des expériences de M. Bessel sur un cylindre

---

pendant qu'on avait fait le vide dans l'appareil, je repris l'expérience et j'obtins le résultat suivant :

	2,076
	2,160
Moyenne....	2,118

Mais, cette fois encore, en examinant le joint de la pièce du fond, j'eus lieu de soupçonner une fuite; ce qui pourrait expliquer peut-être les légères discordances que manifestent les résultats partiels. L'ensemble cependant est très satisfaisant.

creux en laiton, de forme à peu près semblable, oscillant dans l'air et dans l'eau, on constate entre eux une singulière et très considérable différence, puisqu'il trouve pour valeur de n le nombre 9,100 ([1]). Mais, en suivant pas à pas la méthode par laquelle il arrive à cette valeur, il est aisé de découvrir la source de cette discordance apparente. La pesanteur spécifique du laiton dont le cylindre était formé est évaluée à 8,3; mais, en raison de l'air qu'il renferme, la pesanteur spécifique de la masse en mouvement se trouve réduite à 2,079, et c'est cette valeur qu'emploie M. Bessel pour calculer les résultats de la première série d'expériences, où il fait osciller le cylindre fermé d'abord dans l'air et ensuite dans l'eau. Le résultat est $n = 1,754$. Dans la deuxième série, il enlève le fond du cylindre, et après l'avoir fait osciller dans l'air, auquel cas la pesanteur spécifique diminuée était à très peu près la même que dans la première série, il l'immerge dans l'eau, ce qui, dit-il, ramène la masse à la densité du laiton, à peu près 8,3. Avec cette densité, la valeur calculée par M. Bessel est certainement correcte. Mais si nous supposons que la pesanteur spécifique n'est pas ramenée à celle du métal par le fait que le cylindre est rempli d'eau, et si nous remarquons que l'on doit considérer ce cylindre comme formé de métal et d'eau, de même qu'auparavant il était formé de métal et d'air, sa pesanteur spécifique, loin d'être 8,3, n'atteindra pas 2,8, et la valeur du résultat sera très sensiblement modifiée. En fait, si l'on admettait pour densité 2,5 seulement, la valeur de n ne serait que de 1,85; valeur très peu différente de celle que M. Bessel déduit de ses expériences sur le cylindre clos. Or, je trouve, en me servant des données fournies par M. Bessel, que la pesanteur spécifique du cylindre plein d'eau, en y comprenant la pièce de fond, est d'environ 2,8; il est clair que, lorsque le fond est enlevé, la pesanteur spécifique n'est pas aussi forte; et, en adoptant cette valeur diminuée, on voit que la discordance signalée par M. Bessel est considérablement réduite, sinon complètement éliminée ([2]).

([1]) *Voir* son Mémoire, page 67 (p. 189 du t. IV de ce Recueil). Il trouve pour k, d'après deux expériences, les valeurs 7,99 et 8,21, moyenne 8,100, à quoi il faut ajouter 1 pour obtenir la valeur de n. Le diamètre du cylindre de M. Bessel était 2,84 pouces (72^{mm},1) et sa hauteur 3,20 (81^{mm},3).

([2]) M. Bessel remarque que, dans cette expérience, il devait se produire un

Cinquième série.

Résultats obtenus avec la lentille de plomb de 2 pouces.

N° 20.

Exp.	n.
105-106	1,614
107-108	1,546
Moyenne	1,580

L'ensemble des expériences faites avec les vingt pendules précédents avait pour but de déterminer la correction additionnelle relative à des corps suspendus à un fil fin, ou à une tige de très petite épaisseur; c'est une des formes, en effet, que l'on donne aux pendules destinés à des recherches physiques. Dans ces expériences, les pendules étaient tous à peu près de même longueur, 39 pouces (990^{mm},7). Les résultats tendent à montrer que la valeur de n, pour des pendules de même longueur et de construction semblable, dépend entièrement de la forme extérieure et de la grandeur du pendule, et n'est pas influencée par son poids ni par sa pesanteur spécifique. Mais ce résultat doit-il être attribué en partie au fil ou à la tige de suspension, ou est-il dû entièrement à la boule ou au cylindre? Quelle est la part d'influence du fil, s'il en a une? L'effet serait-il le même avec des pendules plus longs ou plus courts? Dans quelles limites serait-il affecté par de semblables variations? Ce sont des questions dont la solution doit être demandée à d'autres expériences, faites spécialement en vue de mettre ces influences en lumière [1].

mouvement particulier de l'eau, provenant de ce qu'une portion du fluide sortait du cylindre pour remplir le vide produit par le mouvement du cylindre, et inversement. Mais, à mon sens, l'effet de ce mouvement sur le résultat général ne peut être que tres faible. Dans mes expériences faites avec les cylindres creux, je n'observe qu'une différence insignifiante quand les deux bouts du cylindre sont laissés ouverts.

[1] Depuis que ce Mémoire a été lu à la Société, j'ai fait de nouvelles expériences pour déterminer quelques-uns des points que je viens de signaler. Ces expériences sont, avec la permission de la Société, rapportées à la suite du Mémoire. Elles tendent à faire considérer le sujet sous un nouvel aspect; car elles montrent que, dans des pendules suspendus à la façon que j'ai décrite, la valeur du facteur n est influencée non seulement par la grandeur de la boule ou du cylindre, mais aussi par la grosseur et la longueur de la tige ou du fil.

J'arrive maintenant à des pendules de construction toute différente.

Sixième série.

Résultats obtenus avec la tige cylindrique de cuivre de 0,41 *pouce de diamètre et* 58,8 *pouces de long.*

N° 21.	
Exp.	*n.*
109-110	2,952
111-112	2,913
Moyenne	2,932

Le facteur obtenu avec ce pendule est le plus grand que j'aie encore trouvé; il surpasse tous ceux qui ont été trouvés pour des sphères et des cylindres suspendus à des fils ou à des tiges fines, et aussi celui qu'a donné la barre massive formant les pendules n°s 31 à 34, qui a 2 pouces de large (58^mm^,8) et 62 pouces (1574^mm^,8) de long.

Septième série.

Résultats obtenus avec le pendule invariable et le pendule réversible de Kater.

	Pendule invariable. (22)		Pendule réversible. (23) Couteau A, ou le gros poids en bas.		(24) Couteau B, ou le gros poids en haut.	
	Exp.	*n.*	Exp.	*n.*	Exp.	*n.*
N° 12	I...	1,588	*Phil.*	2,144 (a)	*Phil.*	2,204 (a)
	II..	1,589	*Trans.*	1,840 (b)	*Trans.*	2,205 (b)
N° 13	III..	1,570	1829.	1,853 (c)	1829.	2,012 (c)
	IV..	1,574	1831.	1,811 (d)	1831.	
	V...	1,615		1,910 (d)		2,109 (d)
	VI..	1,606		1,905 (d)		2,161 (d)
Moyenne...		1,590		1,875		2,135

(*a*) Avec les queues en bois.
(*b*) Avec les queues raccourcies.
(*c*) Avec les queues en laiton.
(*d*) Sans queues d'aucune espèce.

Le résultat moyen pour le pendule invariable diffère de celui que le capitaine Sabine a déduit des mêmes expériences, 1,655. Cette différence tient à deux causes : en premier lieu, il adopte la détermination de Sir George Shuckburgh pour les poids relatifs de l'air et de l'eau, tandis que j'ai préféré, dans tous mes calculs, la détermination plus récente de MM. Arago et Biot ; en second lieu, et c'est là la cause principale de la différence, il prend la pesanteur spécifique du pendule égale à 8,600, tandis que je ne crois pas que l'on puisse correctement la supposer plus grande que 8,400, comme je l'ai déjà dit page 203. Le capitaine Sabine a fait usage de deux pendules, les nos 12 et 13 ; les résultats de chacun d'eux s'accordent bien ensemble.

Quant au pendule réversible, il est clair qu'il faut employer la première détermination des valeurs de n, c'est-à-dire 2,144 et 2,204, pour toutes les expériences faites par le capitaine Kater pour la détermination de la longueur du pendule à secondes, qu'il a insérées dans les *Transactions philosophiques* de 1818 ; il faudrait, de plus, tenir compte de la réduction à la pesanteur spécifique d'*oscillation*. Les trois dernières valeurs relatives à la suspension sur le couteau A, de même que les deux dernières relatives au couteau B, ne peuvent s'appliquer qu'au pendule tel qu'il existe actuellement, entièrement privé de ses queues et du poids curseur.

On trouvera dans les *Philosophical Transactions* de 1829 tous les détails des expériences faites avec le pendule invariable, et dans les années 1829 et 1831, ceux des expériences faites sur le pendule réversible ([1]).

([1]) *Voir*, dans ce Volume, les traductions des deux Mémoires du capitaine Sabine.

Huitième série.

Résultats obtenus avec une barre de fer de 2 pouces de large, $\frac{3}{8}$ de pouce d'épaisseur et 62,2 pouces de long.

(25) Sur le couteau A.		(26) Sur le couteau B.	
Exp.	n.	Exp.	n.
113-114...	1,872	115-116...	2,027
119-121...	1,819	117-118...	2,007
122-124...	1,844	126-128...	1,975
124-125...	1,865	128-130...	1,956
136-139...	1,848	131-133...	1,945
139-141...	1,838	133-135...	1,896
Moyenne.	1,848		1,968

Neuvième série.

Résultats obtenus avec les barres de cuivre et de fer de 2 pouces de large et $\frac{1}{2}$ pouce d'épaisseur.

Cuivre, 62,5 pouces de long.

(27) Sur le couteau A.		(28) Sur le couteau B.	
Exp.	n.	Exp.	n.
...	1,896	...	1,998
...	1,915	...	1,994
...	1,856	...	1,978
...	1,899	...	1,994
Moyenne.	1,891		1,991

Fer, 62,1 pouces de long.

(29) Sur le couteau A.		(30) Sur le couteau B.	
Exp.	n.	Exp.	n.
...	1,935	...	2,098
...	1,926	...	2,019
...	1,975	...	2,078
...	1,945	...	2,061
Moyenne.	1,945		2,064

Comme ces deux barres sont de même épaisseur, il semblerait

que c'est le pendule le plus court qui donne la plus grande valeur de n; mais la différence tient probablement à quelque erreur dans la pesanteur spécifique des deux métaux. Je n'ai pu, en effet, ainsi que je l'ai déjà dit, l'obtenir par expérience directe sur le pendule. Je n'ai pas donné ici les numéros de ces expériences, dont les détails forment le sujet d'un Rapport au Gouvernement, que je suis en train d'écrire, touchant les pendules employés par feu le capitaine Foster dans son voyage d'expériences.

Dixième série.

Résultats obtenus avec une barre de laiton de 2 pouces de large, $\frac{3}{4}$ de pouce d'épaisseur et 62 pouces de long.

(31) Sur le couteau A.		(32) Sur le couteau B.	
Exp.	n.	Exp.	n.
142-143...	2,061	145-146...	2,071
143-144...	2,057	146-147...	2,061
154-155...	2,034	157-159...	2,053
155-156...	2,114	159-160...	2,127
Moyenne.	2,071		2,078

(33) Sur le couteau C.		(34) Sur le couteau D.	
Exp.	n.	Exp.	n.
151-152...	2,098	148-149...	2,090
152-153...	2,064	149-150...	2,046
164-165...	2,111	161-162...	2,104
165-166...	2,124	162-163...	2,109
Moyenne.	2,099		2,087

Si l'on prend la moyenne des résultats donnés par les oscillations sur les couteaux A et D, placés aux extrémités de la barre, de telle façon que la partie la plus lourde soit au-dessous de l'axe de suspension, on obtient pour n la valeur 2,079. La moyenne donnée par les oscillations sur les couteaux B et C, dans les positions inverses du pendule, donne $n = 2,088$; ce sont les deux valeurs correctes pour ce pendule. Mais la différence en est insignifiante, de sorte que l'on peut prendre la moyenne générale, 2,083, pour tous les couteaux, sans craindre une erreur sensible.

Onzième série.

Résultats obtenus avec un tube de laiton de $1\frac{1}{2}$ pouce de diamètre, et 56,2 pouces de long.

(35) Sur le plan A.		(36) Sur le plan C.	
Exp.	*n.*	Exp.	*n.*
169-170...	2,318	171-172...	2,269
175-178...	2,318	179-180...	2,247
Moyenne.	2,318		2,258

(37) Sur le plan *a*.		(38) Sur le plan *c*.	
Exp.	*n.*	Exp.	*n.*
173-174...	2,243	167-168...	2,293
181-184...	2,291	185-188...	2,341
Moyenne.	2,267		2,317

Si, comme dans le cas de la barre précédente, nous prenons la moyenne des résultats relatifs aux deux plans A et *c*, qui sont situés aux extrémités du tube, les valeurs de *n* sont identiques l'une à l'autre, 2,318, et la moyenne relative aux deux autres plans, dans les positions inverses du pendule, donne *n* égal à 2,262. De sorte que, pour ce pendule, la valeur de *n*, quand l'extrémité la plus lourde est au-dessus de l'axe de suspension, est *moindre* que lorsque le pendule est dans la position inverse, contrairement à ce qui a lieu pour le pendule précédent, et contrairement aussi à la théorie d'un pareil pendule donnée récemment par plusieurs éminents géomètres.

Douzième série.

Résultats donnés par des balanciers d'horloge avec suspension à ressort.

		Lentille cylindrique en plomb.			
(39) Pendule à mercure.		(40) Tige cylindrique.		(41) Tige plate.	
Exp.	*n.*	Exp.	*n.*	Exp.	*n.*
189-190...	2,441	201-202...	2,562	197-198...	2,794
191-192...	2,316	203-204...	2,616	199-200...	2,860
193-194...	2,350		»		»
195-196...	2,267		»		»
Moyenne.	2,343		2,589		2,827

Outre ces balanciers d'horloge, il en existe encore une autre espèce, dont il n'est pas parlé ici, et qui est formée d'une masse lenticulaire d'un métal pesant, suspendue soit par une simple tige, soit par un système de tiges compensatrices; c'est ce que l'on appelle, dans ce dernier cas, un *pendule à gril*. Comme le récipient de mon appareil n'était pas assez large pour recevoir un pareil pendule, je ne puis donner aucune indication sur la valeur de n relative à ce cas. Mais, puisque la lentille de ces pendules n'est pas très différente de celle du pendule réversible du capitaine Kater, après qu'il a été débarrassé de ses queues (pendule n° 23), on peut se faire une idée de la valeur probable de n pour un pendule suspendu par une simple tige. Quant au pendule à gril, on peut se demander si l'air compris entre les tiges verticales ne diminue pas leur pesanteur spécifique, quand on considère le système comme un corps oscillant. Pour les cylindres de plomb fixés à des tiges de bois, on voit, d'après les observations, que, pour les pendules n°s 40 et 41, le facteur est plus grand dans le cas de la tige plate que dans celui de la tige cylindrique, contrairement peut-être à ce que l'on aurait pu prévoir ([1]).

Coup d'oeil général sur l'ensemble des résultats.

Après avoir donné le détail de mes diverses expériences, j'ai maintenant à jeter un coup d'œil général sur l'ensemble des résultats obtenus. C'est dans ce but que j'ai construit le Tableau suivant : j'y donne d'abord, pour chaque pendule, la valeur de l'ancienne correction pour la réduction au vide, en supposant que le baromètre se tient à 30 pouces (762^{mm},0), que le thermomètre est à 32°F. et que le nombre d'oscillations en un jour solaire moyen est exactement de 86400. Je donne ensuite la valeur du facteur n, ou du coefficient par lequel la première correction doit être multipliée pour obtenir la nouvelle correction ; celle-ci est donnée dans la colonne suivante telle qu'elle se déduit des expériences précédentes. J'ai ajouté, dans une dernière colonne,

([1]) Ce résultat se trouve confirmé par une expérience répétée sur le même cylindre, avec des tiges de mêmes formes que dans le cas précédent, mais faites de matériaux différents. La différence était environ 0,200, tout comme dans le cas actuel.

le poids de l'air adhérent au pendule ou qu'il traîne après lui en conséquence du mouvement qu'il lui imprime ; plus exactement, c'est la quantité d'air qui, si elle était appliquée au *centre de giration* du pendule, produirait le retard que les expériences ont mesuré. Cette manière de considérer la question m'a été suggérée par le Professeur Airy, qui a bien voulu en même temps me communiquer la formule par laquelle on doit calculer le *poids de l'air adhérent* et sa démonstration.

« Soit N le nombre d'oscillations exécutées par un pendule en un jour solaire moyen, quand il se meut dans l'air ; et soit ν le nombre additionnel qu'il en fait en plus dans le vide. Désignons par w le poids du pendule en grains troy, par S sa pesanteur spécifique et par σ celle de l'air. Maintenant, puisque l'intensité de la pesanteur est diminuée dans le rapport de $(N+\nu)^2$ à N^2, ou à très peu près de $\left(1+\frac{2\nu}{N}\right)$ à l'unité, il s'ensuit que, lorsque le pendule oscille dans l'air, c'est comme si, conservant l'inertie de son poids w, il avait pour pesanteur $w \times \frac{N^2}{(N+\nu)^2}$ ou à peu près $w\left(1-\frac{2\nu}{N}\right)$, ou enfin comme s'il éprouvait une perte de poids $w \times \frac{2\nu}{N}$. Mais la perte de poids réelle due au déplacement de l'air est $w \times \frac{\sigma}{S}$. En conséquence, la portion dont le simple déplacement de l'air ne rend pas compte est

$$(9) \qquad w\left(\frac{2\nu}{N}-\frac{\sigma}{S}\right).$$

Et l'on peut considérer cette quantité comme représentant l'augmentation d'inertie du pendule se mouvant dans l'air, c'est-à-dire le poids additionnel appliqué à son centre de giration [1]. »

[1] L'inertie du pendule total, *par laquelle il résiste au mouvement angulaire,* est la même que si elle était toute rassemblée au centre de giration. Le résultat immédiat de l'expérience et de la formule donnée ci-dessus est que l'inertie du pendule tout entier doit être augmentée dans le rapport de l'unité à $\left(1+\frac{2\nu}{N}-\frac{\sigma}{S}\right)$; ou bien qu'au lieu de supposer l'inertie w appliquée au centre de giration, c'est l'inertie $w\left(1+\frac{2\nu}{N}-\frac{\sigma}{S}\right)$ qu'il y faut appliquer. L'accroissement

C'est la valeur de cette quantité qui est donnée dans la dernière colonne du Tableau suivant ([1]). Son poids est exprimé en grains troy, l'air est supposé ramené à la température de 32° F. et à la pression de 29,9218 pouces (760mm,0); sa pesanteur spécifique est prise égale à 0,001299.

Tableau de comparaison de l'ancienne et de la nouvelle correction de réduction au vide, où l'on donne le facteur par lequel il faut multiplier la première pour obtenir la seconde, ainsi que le poids (en grains) de l'air adhérent entraîné par le pendule.

Pendules.	N°.	Ancienne correction.	Facteur n.	Nouvelle correction.	Poids de l'air adhérent.
Sphères de $1\frac{1}{2}$ pouce de diamètre. Platine	1	2,709	1,881	5,104	0,496
Plomb	2	5,003	1,871	9,362	0.468
Laiton	3	7,343	1,834	13,467	0.457
Ivoire	4	30,080	1,872	56,310	0,472
Sphères de 2^{po} de diamètre, sur couteau. Plomb	5	4,988	1,738	8,668	1,115
Laiton	6	7,032	1,751	12,317	1,140
Ivoire	7	32,143	1,755	56,420	1.164
sur cylindre. Plomb	8	4,988	1,746	cas douteux	
Ivoire	9	32,143	1,741		
Cylindre de laiton de 2^{po}, suspendu à un fil, les bases horizontales	10	6,882	1,860	12,800	1,945
suspendu à une tige, les bases verticales, l'axe perpendiculaire au plan d'oscillation	11	6,859	1,920	13,169	2,378
les bases verticales, l'axe dans le plan d'oscillation	12	6,859	1,950	13,377	2,451
les bases horizontales	13	6,859	1,922	13,188	2,38[illegible]
Cylindre de laiton de 4^{po}, plein, rempli de plomb	14	5,448	2,032	11,070	4,558
creux, ouvert aux deux bouts	15	22,172	1,925	42,686	4,045
ouvert par le haut, fermé par le bas	16	21,437	1,940	41,582	4.165
fermé par le haut, ouvert par le bas	17	21,955	1,975	43,378	4,283
fermé aux deux bouts	18	21,227	2,000	42,468	4,454
hermétiquement clos	19	25,191	2,070	52,150	4,532

de l'inertie est donc $\frac{2v}{N} - \frac{\sigma}{S}$, appliquée au même point où l'on peut supposer appliquée celle du pendule, c'est-à-dire au centre de giration.

([1]) Dans tout le calcul, néanmoins, au lieu de la valeur approchée $\frac{2v}{N}$, j'ai pris la va-

Pendules.	Nos.	Ancienne correction.	Facteur n.	Nouvelle correction	Poids de l'air adhérent.
		s		s	
Lentille de plomb, de 1 pouce d'épaisseur......	20	5,000	1,580	7,900	0,438
Longue tige cylindrique en cuivre..............	21	6,519	2,932	19,117	4,904
Pendule invariable de Kater, en laiton..........	22	6,697	1,590	10,649	8,339
Pendule réversible de Kater, muni de ses queues en bois (1), oscillant sur le couteau A..	23	7,630	2,144	16,356	»
Pendule réversible de Kater, muni de ses queues en bois (1), oscillant sur le couteau B..	24	7,630	2,204	16,815	»
Longues barres de 2po de large. Épaisseur $\frac{3}{6}$ pouce. Laiton. oscillant sur le couteau A..	25	7,002	1,848	12,938	16,705
Longues barres de 2po de large. Épaisseur $\frac{3}{6}$ pouce. Laiton. oscillant sur le couteau B..	26	7,002	1,968	13,780	19,049
Longues barres de 2po de large. Épaisseur $\frac{1}{2}$ pouce. Cuivre oscillant sur le couteau A..	27	6,519	1,891	12,330	20,986
Longues barres de 2po de large. Épaisseur $\frac{1}{2}$ pouce. Cuivre oscillant sur le couteau B..	28	6,519	1,991	12,980	23,276
Longues barres de 2po de large. Épaisseur $\frac{1}{2}$ pouce. Fer oscillant sur le couteau A..	29	7,319	1,945	14,937	22,455
Longues barres de 2po de large. Épaisseur $\frac{1}{2}$ pouce. Fer oscillant sur le couteau B..	30	7,319	2,064	15,107	25,435
Longues barres de 2po de large. Épaisseur $\frac{1}{4}$ pouce. Laiton. oscillant sur le couteau A..	31	6,980	2,071	14,460	40,594
Longues barres de 2po de large. Épaisseur $\frac{1}{4}$ pouce. Laiton. oscillant sur le couteau B..	32	6,980	2,078	14,569	
Longues barres de 2po de large. Épaisseur $\frac{1}{4}$ pouce. Laiton. oscillant sur le couteau C..	33	6,980	2,099	14,506	
Longues barres de 2po de large. Épaisseur $\frac{1}{4}$ pouce. Laiton. oscillant sur le couteau D..	34	6,980	2,087	14,612	
Long tube de laiton oscillant sur le plan A....	35	18,546	2,318	42,990	45,937
Long tube de laiton oscillant sur le plan C....	36	18,546	2,258	41,874	43,563
Long tube de laiton oscillant sur le plan a....	37	18,546	2,267	42,048	44,195
Long tube de laiton oscillant sur le plan c....	38	18,546	2,317	42,974	45,900
Balanciers d'horloge, suspension à ressorts. A mercure..............	39	5,312	2,343	12,448	17,003
Balanciers d'horloge, suspension à ressorts. Lentille en plomb. Tige cylindrique..	40	5,190	2,589	13,104	17,462
Balanciers d'horloge, suspension à ressorts. Lentille en plomb. Tige plate.	41	5,190	2,827	14,312	20,120

leur exacte $(N-\nu)^2 - N^2$. La différence est d'ailleurs insignifiante, à moins que la pesanteur spécifique du pendule ne soit très petite.

(1) Pour les autres cas du pendule réversible de Kater, *voir* la page 218.

Il ressort de ce Tableau que, dans le cas des sphères dont le diamètre est plutôt un peu inférieur à $1\frac{1}{2}$ pouce, ce qui est à peu près la dimension de celles de Borda et de M. Biot dans leurs expériences sur la longueur du pendule à secondes, et suspendues par un fil fin, la valeur de n pour des pendules de cette longueur peut être prise égale à 1,86 ; mais lorsque le diamètre est porté à 2 pouces, comme dans les expériences de M. Bessel, la valeur de n s'abaisse à 1,75. Je regrette que la construction de mon appareil ne me permette pas d'y faire des expériences sur des boules ou plus grosses ou plus petites, et sur des pendules plus longs ou plus courts; sans quoi j'aurais certainement poursuivi mes recherches afin d'en tirer la loi à laquelle sont soumises les valeurs de n pour les pendules de ce genre ([1]). On voit également, par la comparaison des pendules nos 10 et 13, que la grosseur du fil ou de la tige de suspension a sur les résultats un effet sensible, bien que faible dans les cas que j'ai examinés : la valeur de n augmente en même temps que la grosseur du fil. Cette valeur est affectée aussi par la forme de la tige, comme le montre la comparaison des nos 40 et 41; c'est un point sur lequel je reviendrai tout à l'heure.

Le cylindre plein, de 2 pouces de long, donne pour n la valeur 1,86 ([2]); un autre, de même diamètre, mais d'une longueur double, donne 2,03; et le tube cylindrique, de 56 pouces de long, donne seulement 2,3 à peu près, tandis que la tige cylindrique mince, qui n'a pas beaucoup plus de $\frac{1}{10}$ de pouce en diamètre, donne plus de 2,9. D'autres anomalies apparentes se présentent d'elles-mêmes, dès qu'on examine et que l'on compare un peu attentivement les valeurs données dans le Tableau : de nouvelles expériences pourront seules en donner l'explication.

([1]) J'ai fait, depuis la lecture de ce Mémoire, quelques modifications à mon appareil qui m'ont permis d'étendre l'échelle de mes expériences; j'en parlerai plus en détail dans la suite.

([2]) Depuis la lecture de ce Mémoire, j'ai eu connaissance des expériences additionnelles sur le pendule, que M. Bessel a publiées dans les *Astronomische Nachrichten*, n° 223 (*voir* ce Volume, p. 126). De ces expériences, il déduit $n = 1,755$ pour un cylindre très semblable à celui que j'ai décrit; la longueur du fil était aussi presque égale à celle du mien. Mais, pour son *long pendule*, il trouve la valeur 1,952. Il a aussi légèrement accru la valeur de n déduite de ses premières expériences, et il l'a portée à 1,956, au lieu du nombre 1,946 que j'ai cité p. 189.

Il ressort aussi du Tableau que le nombre d'oscillations qu'il faut ajouter à celui que donne directement l'expérience faite avec une boule de platine, semblable à celle de M. Biot, est de 2,395 (¹); tandis que le nombre additionnel à appliquer aux résultats des expériences du capitaine Kater avec le pendule réversible oscillant sur le couteau A est 8,726, en admettant que la pesanteur spécifique qu'il donne soit exacte (*voir* p. 204). De sorte que ces deux pendules, que l'on considérait comme s'accordant très exactement lorsqu'on appliquait l'ancienne correction de réduction au vide, diffèrent maintenant de 6,331 oscillations en un jour solaire moyen; ce qui correspond à $\frac{1}{175}$ de pouce ($0^{mm},145$) dans la longueur du pendule à secondes. Dans chacun de ces calculs, le pendule est supposé faire exactement 86400 oscillations en un jour solaire moyen.

Il ressort du Tableau général de comparaison que la longue tige cylindrique de cuivre nº 21 est celle qui se montre le plus influencée par la nouvelle correction, plus même qu'aucun des cylindres ou des sphères suspendus à un fil, ou que la barre épaisse de laiton nº 31, qui présente pourtant une surface plate de $\frac{3}{4}$ de pouce de large perpendiculairement au plan d'oscillation. Nous trouvons aussi que les petites sphères sont plus fortement affectées que les grosses, ce qui concorde avec les résultats obtenus par du Buat dans des expériences sur lesquelles je reviendrai plus loin. Mais je ne vois pas quelle explication on pourrait donner des rapports des résultats relatifs aux autres pendules, ni à quel principe connu il serait possible de les rattacher. Il n'y a pas d'autre moyen de déterminer actuellement l'effet de la présence de l'air sur ces pendules, que de les soumettre à l'expérience directe. De l'ensemble de mes observations résulte cependant cette conséquence, qu'il est rigoureusement impossible de comparer les résultats de tous les pendules invariables qui ont été mis en oscillation dans les diverses parties du globe, à moins de les soumettre, eux ou leurs prototypes, à l'épreuve rigoureuse du

(¹) C'est là la valeur qu'il faut appliquer pour le pendule de M. Biot; mais il ne s'ensuit pas qu'il serait correct d'appliquer la même correction aux expériences de Borda, qui a employé un pendule à *deux secondes,* tant qu'il n'est pas prouvé que la correction soit la même pour des pendules longs ou courts de cette forme.

vide. Les pendules anglais ont généralement été construits sur un même modèle, le n° 22 de l'énumération précédente; mais j'ai vu des pendules français, de forme toute différente, où la lentille est beaucoup plus épaisse et suspendue à une tige cylindrique : ces pendules donneraient probablement une valeur très différente de n, si on les soumettait à l'expérience à laquelle j'ai soumis les autres. Les tiges des pendules emportés par MM. Freycinet et Duperrey étaient cylindriques et avaient à peu près $\frac{1}{2}$ pouce de diamètre. Il y a donc lieu de douter que les résultats qu'ils ont donnés soient strictement comparables à ceux des pendules du modèle du capitaine Kater. J'ai déjà fait voir, dans les expériences faites sur les pendules n°s 40 et 41, qu'une pareille différence dans la forme de la tige seule, la lentille restant la même, produit sur le résultat une différence qui s'élève à plus de 1,2 oscillation par jour; et il existe, en outre, probablement d'autres causes de discordance que l'expérience effective seule pourrait mettre en évidence. J'ai donc lieu de craindre que, si l'on veut déduire la véritable forme de la Terre des expériences du pendule faites jusqu'à présent, on ne soit en droit de comparer entre elles que celles de ces expériences qui ont été faites avec des pendules absolument identiques.

Si nous examinons l'effet de la nouvelle correction sur le balancier à mercure, généralement adopté aujourd'hui pour les horloges astronomiques, nous trouvons qu'une différence de 1 pouce dans la pression atmosphérique produirait un changement de $0^s,414$ dans la marche diurne de l'horloge, ce qui est plus du double de la variation qu'on attribue ordinairement au changement de la pression barométrique. Une pareille variation ne peut donc être négligée désormais par les astronomes. Le Dr Robinson, en vue de corriger cette influence de la variation de la pression atmosphérique sur la marche de l'horloge de l'observatoire d'Armagh, a dernièrement fixé un baromètre à siphon à la tige du balancier à mercure, en le plaçant de telle façon que les variations de hauteur de la colonne mercurielle du baromètre compensent exactement l'effet de la variation de la pression atmosphérique. M. Davies Gilbert, dans le supplément à un Mémoire inséré dans le *Quarterly Journal*, t. XV, a fait voir que la même compensation peut s'obtenir par un choix particulier de l'amplitude d'oscillation; l'effet produit par la différence de densité de l'atmo-

sphère sera, dans ce cas, exactement contrebalancé par l'effet résultant de la différence d'amplitude que produira cette différence même de densité. En partant de la formule qu'il a donnée pour déterminer la valeur de cet arc, et en supposant l'exactitude de la nouvelle correction telle qu'elle est donnée plus haut, je trouve que la valeur de l'arc d'oscillation qu'il faudrait donner au balancier serait de 2°45′ de part et d'autre de la verticale, soit une amplitude totale de 5°,5. Le demi-arc d'oscillation est rarement, je crois, de plus de 2° dans les horloges astronomiques, et il ne produirait que la moitié de l'effet compensateur désiré. Donc, en admettant l'exactitude de la théorie de M. Gilbert, il doit rester encore une variation de marche de l'horloge à pendule mercuriel, qui, pour une différence de 1 pouce dans la pression barométrique, doit atteindre plus de $\frac{9}{10}$ de seconde. Ce nombre correspond bien aux résultats obtenus récemment par le Dr Robinson, d'après des observations faites expressément pour déterminer cette influence (1). Il est à souhaiter que l'attention des astronomes se porte à l'avenir plus particulièrement sur ce point.

Les nombres de la dernière colonne du Tableau, qui représentent le poids de l'air adhérent au pendule et supposé appliqué au centre de giration, suivent une marche toute différente de celle des valeurs du facteur n, et conduisent à une explication plus satisfaisante de l'influence de l'air sur le mouvement du pendule. Il en ressort avec évidence, en effet, que le poids de l'air entraîné par le pendule dépend principalement de la grosseur du corps en mouvement. Cette influence semble néanmoins affectée par d'autres circonstances encore inconnues, de sorte que la loi exacte de la variation de cette influence n'apparaît pas suffisamment dans les exemples que j'apporte : d'autres expériences encore sont nécessaires pour éclaircir complètement ce point délicat, mais important (2).

Différence entre les deux extrémités d'un pendule réversible.

Si l'on examine les résultats relatifs aux divers pendules réver-

---

(1) *Voir* les *Mémoires de la Société Royale Astronomique*, t. V, p. 125.

(2) Les *expériences additionnelles* que j'ai faites sur ce sujet, postérieurement à la lecture de ce Mémoire, sont relatées plus loin, p. 232.

sibles rapportés dans le Tableau précédent, on trouve que le facteur n n'est pas le même pour les oscillations sur les deux couteaux. C'est un fait déjà signalé par M. Bessel, dans le Mémoire auquel j'ai si souvent fait allusion, et aussi par M. Poisson dans le travail qu'il a publié récemment dans la *Connaissance des Temps*. Mais ces deux auteurs semblent admettre que le facteur doit avoir toujours une plus grande valeur dans le cas où l'extrémité la plus pesante est au-dessus de l'axe de suspension que dans la position inverse du pendule. Cela ne paraît pas cependant être toujours vrai, comme le montre le Tableau suivant. J'y donne les valeurs de n pour les deux couteaux des divers pendules réversibles dont j'ai fait usage dans mes expériences, avec le rapport de ces deux valeurs, en prenant pour unité le facteur qui se rapporte au couteau A, ou à la position du pendule dans laquelle le poids le plus lourd est au-dessous de l'axe de suspension.

Facteur de la correction relative à un pendule réversible, pour la réduction au vide, et rapport des corrections relatives aux deux couteaux.

		Couteau		
N°	Pendules.	A.	B.	Rapport.
23.	Pendule de Kater, muni de ses queues en bois.	2,144	2,204	1,028
25.	Barre de laiton, de $\frac{3}{8}$ de pouce d'épaisseur....	1,847	1,968	1,066
27.	Barre de cuivre, de $\frac{1}{2}$ pouce d'épaisseur......	1,891	1,991	1,053
29.	Barre de fer, de $\frac{1}{2}$ pouce d'épaisseur..........	1,945	2,064	1,061
31.	Barre de laiton, de $\frac{3}{4}$ pouce d'épaisseur.......	2,079	2,085	1,003
35.	Tube de laiton, de $\frac{1}{2}$ pouce de diamètre.......	2,318	2,262	0,976

Ce Tableau montre que si, pour les quatre premiers pendules, la correction relative au couteau B l'emporte sur celle du couteau A, ces corrections sont à peu près égales dans le cas de la barre de laiton n° 31, et que, pour le tube de même métal n° 35, la correction relative au couteau B est moindre que celle du couteau A, contrairement à ce qui a eu lieu pour les autres pendules et contrairement aussi à la théorie adoptée sur ce point [1].

---

[1] Il est probable que la position des deux couteaux additionnels avec leurs équerres dans la barre n° 31, et celle des quatre plans additionnels avec leurs colliers dans le tube n° 35, ont pu être de quelque influence dans la production de cette discordance apparente.

On doit à M. Bessel l'idée de rendre synchrones les oscillations d'un pendule réversible sur ses deux couteaux, en donnant au pendule une forme symétrique, tandis que sa masse ne l'est pas, ce qui peut s'obtenir en faisant *creuse* une des parties du pendule. Dans ce cas cependant, on doit considérer la partie creuse du pendule comme une matière de densité différente, et calculer en conséquence son effet sur la masse oscillante. Les résultats devront donc probablement, dans ce cas, différer suivant que la partie creuse sera hermétiquement close ou qu'elle communiquera librement avec l'air extérieur.

EXPÉRIENCES ADDITIONNELLES.

Depuis que ce Mémoire a été lu à la Société Royale, j'ai fait un certain nombre d'*expériences additionnelles* sur d'autres pendules de différentes formes et diversement construits, et j'ai modifié et combiné d'une nouvelle manière quelques-uns de ceux que j'avais déjà employés. Mon but était de tirer au clair les anomalies apparentes que j'avais rencontrées dans mes expériences précédentes, et de jeter quelque lumière sur la manière dont l'air agit sur le pendule en mouvement pour en modifier la durée d'oscillation. Le Bureau de la Société m'ayant permis d'imprimer la substance de ces expériences à la suite de mon Mémoire, je vais exposer brièvement les résultats que j'ai obtenus; je les expliquerai dans la mesure nécessaire pour l'intelligence du procédé que j'ai employé et des conséquences que j'en ai déduites. Mais je ne crois pas nécessaire d'abuser de la faveur qui m'a été faite, pour donner le détail complet de ces expériences, qui d'ailleurs, je dois le dire tout de suite, ont été conduites d'après les mêmes principes et la même recherche d'exactitude que celles que j'ai rapportées dans mon Mémoire. En fait, on verra qu'il n'y a pas lieu d'entrer dans des détails minutieux sur les particularités de chaque expérience; car on constatera que les conséquences les plus importantes qui s'en déduisent ne reposent pas sur l'appréciation de simples nuances, mais que les différents cas sont séparés au contraire par de larges lignes de démarcation. Les erreurs probables d'observation et de calcul ne peuvent donc produire aucune différence appréciable dans les résultats ou dans les conséquences qui s'en déduisent. Bien plus, on verra que les résultats

des diverses séries d'expériences présentent une marche régulière, qui est la confirmation de l'exactitude de l'ensemble. Il est bon de dire d'ailleurs, une fois pour toutes, que chaque valeur citée est le résultat d'au moins quatre expériences indépendantes.

Les savants qui ont porté leur attention sur le sujet qui nous occupe ont généralement, je crois, pensé que, dans tous les pendules à fil, l'effet principal de l'air, au point de vue de l'augmentation de l'inertie, s'exerce sur le corps attaché au fil qui le supporte, et que le fil lui-même, dont le degré de finesse est le plus petit qui puisse s'employer avec sécurité, n'a qu'une très faible influence, ou même une influence nulle, sur la durée de l'oscillation. Toutes les expériences, toutes les études théoriques ont été conduites conformément à cette manière de voir. Elle ne s'écarte sans doute pas beaucoup de la vérité dans la plupart des cas qui se présentent usuellement et que les théoriciens ont considérés : cependant il est à désirer que l'effet direct de l'air sur les diverses parties du pendule puisse être déterminé séparément et avec toute la précision possible dans tous les cas qui peuvent se présenter, et j'ai dû instituer de nouvelles expériences pour éclaircir ce point.

Dans toute la suite de mes recherches, j'ai eu l'occasion d'apprécier la haute utilité d'une recommandation suggérée par le Professeur Airy : déterminer surtout le poids de l'air adhérent à chaque pendule soumis à l'expérience. Elle m'a permis en effet, non seulement de mettre en évidence l'influence directe de l'atmosphère sur le pendule avec bien plus de précision et plus clairement que ne l'avait fait la simple détermination du facteur n ; mais j'ai pu en même temps distinguer son influence sur chacune des parties du pendule. Dans beaucoup des expériences suivantes, la marche des valeurs qui mesurent cette influence semble à première vue très compliquée et irrégulière ; car, dans quelques-unes, dans la 14e série par exemple, le poids de l'air adhérent semble *moindre* lorsque les boules sont fixées à la barre que lorsque celle-ci oscille seule ; et dans d'autres, comme la 19e série, le poids de l'air entraîné par un disque mince paraît croître d'une manière extraordinaire, par un simple changement de position de ce disque sur la tige. Je dois à l'obligeance du Professeur Airy l'étude suivante de la question, qui nous permettra d'élucider

entièrement ces discordances apparentes et plusieurs autres.

« Il me paraît que les phénomènes auxquels vous faites allusion peuvent en général s'expliquer en supposant qu'une quantité d'air, dépendante de la figure du corps, adhère à celui-ci pendant qu'il se meut et ajoute à son inertie sans altérer sa pesanteur. Dans les expériences sur des corps de forme simple, on peut calculer la quantité d'air dont l'inertie, en le supposant réuni et adhérent au centre de giration, expliquerait le retard du pendule (*voir* p. 224). Si donc un corps composé C est formé de deux parties A et B, c, a et b désignant les distances des trois centres de giration à l'axe de suspension, et si α et β sont les quantités d'air adhérant aux centres de giration de A et de B, on doit considérer le pendule composé C comme chargé de l'inertie de α à la distance a et de celle de β à la distance b. L'effet sera le même que si l'inertie de $\frac{\alpha a^2 + \beta b^2}{c^2}$ était appliquée à la distance c. Si donc nous trouvons, comme résultat de l'expérience faite sur le pendule composé C, que l'action de l'air ajoute l'inertie γ à son centre de giration, nous avons l'équation

$$\frac{\alpha a^2 + \beta b^2}{c^2} = \gamma;$$

d'où l'on tire

(10) $$\beta = \gamma\left(\frac{c}{b}\right)^2 - \alpha\left(\frac{a}{b}\right)^2.$$

» Ce qui donnera la mesure exacte de la quantité d'air β entraînée par le corps B seul [1]. »

Nous sommes ainsi en possession d'une méthode qui nous permettra d'estimer séparément l'influence de l'air sur une sphère, un cylindre ou tout autre corps B fixé à une tige A, à une distance quelconque du point de suspension. C'est ainsi que j'ai pu, dans les Tableaux suivants, ajouter une colonne indiquant, dans chaque cas, l'effet de l'air ou l'accroissement d'inertie dû au corps suspendu tout seul, abstraction faite de la tige, et calculé d'après la formule précédente. Je vais maintenant donner le détail des expé-

---

[1] M. Airy suppose ici bien évidemment qu'on a fait osciller d'abord le corps A seul, la tige du pendule par exemple, de manière à déterminer α, puis le pendule composé C, c'est-à-dire la tige chargée du corps B. La suite montrera que c'est en effet de cette manière que Baily a appliqué la formule (10). (C. W.)

riences, en commençant par celles qui ont servi à déterminer l'effet dû à la tige seule.

On peut voir que, parmi les expériences précédentes, il en est quelques-unes qui ont été faites sur un long tube cylindrique de laiton (nos 35 et 38) et sur une longue tige cylindrique de cuivre (no 21). Le tube, qui a un $\frac{1}{2}$ pouce de diamètre, donne une valeur du facteur n moindre que celle que donne la tige, qui n'a qu'un peu plus de $\frac{1}{10}$ de pouce de diamètre. Dans l'espoir d'arriver à déterminer la loi de ces valeurs, je voulus essayer d'autres tiges cylindriques, supportées de la même manière que celle de cuivre et ayant à peu près la même longueur, mais de diamètres beaucoup plus petits. Je me procurai donc une tige, ou plutôt un fil de laiton de 0,185 pouce de diamètre ($4^{mm},7$); c'était, en fait, un morceau du même fil qui m'avait servi à suspendre le cylindre de laiton plein no 11, et dont j'ai parlé dans mon Mémoire à la page 199. J'en fis faire un autre de même longueur à peu près et de diamètre encore moindre; mais, comme le laiton amené à ce degré de finesse n'aurait pas bien rempli le but, je pris un fil d'acier de 0,072 pouce ($1^{mm},8$) de diamètre seulement [1].

La longueur de la tige de laiton était de 56,4 pouces ($1432^{mm},5$); elle pesait 3106 grains ($201^{gr},26$), et je trouvai sa pesanteur spécifique égale à 8,444. La longueur de la tige d'acier était aussi 56,4 pouces; son poids, y compris celui d'une petite vis de laiton fixée à l'un des bouts, était 433 grains ($28^{gr},06$) et sa pesanteur spécifique 7,687. Pour faire osciller ces tiges, on les vissait à la queue de l'appareil à couteau décrit à la page 197, dont la longueur est 1,55 pouce ($39^{mm},4$). Les résultats des expériences sont donnés dans le petit Tableau suivant; j'y désigne, pour plus de commodité, les nouveaux pendules par des numéros qui continuent ceux du grand Tableau de la page 225. Le nouveau no 42 est le même que le no 21 de la première liste.

---

[1] C'est juste cinq fois la grosseur du fil de fer dont j'ai fait usage dans les expériences précédentes avec les pendules nos 1 à 20.

Treizième série.

Résultats obtenus avec de simples tiges cylindriques.

Tiges de pendule.	Nos.	n.	Poids de l'air adhérent.
Cuivre, longueur 58,8 pouces, diamètre 0,410 pouce	42	2,932	4,904
Laiton, longueur 56,4 pouces, diamètre 0,185 pouce	43	4,083 (1)	1,484
Acier, longueur 56,4 pouces, diamètre 0,072 pouce	44	7,530	0,479

Ce Tableau nous montre un accroissement régulier de la valeur de n, à mesure que le diamètre de la tige diminue. La conséquence en est qu'avec un fil beaucoup plus fin encore, comme ceux dont on se sert dans les expériences du pendule, la valeur de n deviendrait très considérable. Mais jusqu'à quelle limite faut-il étendre cet accroissement? Je n'ai aucun moyen de le dire, car il m'a été impossible d'opérer sur des fils plus fins que celui d'acier que j'ai employé. En raison de son faible poids, un tel pendule revient bien vite au repos, si vite même que, pour me mettre en garde contre toute erreur provenant de cette cause, j'ai dû prendre, pour déterminer chaque résultat isolé, la moyenne de trois séries consécutives d'expériences.

---

(1) Je ne dois pas omettre de dire que ce nombre est la moyenne de huit expériences différentes, faites avec deux tiges différentes, à deux époques différentes. Quatre d'entre elles, comprenant deux couples d'expériences, furent faites le 14 juin avec le fil dont je viens de parler; les autres sont du 2 août et se rapportent à un autre morceau de fil tout semblable, ayant exactement la même densité, mais plus long de $\frac{1}{2}$ pouce à peu près. Les résultats de ces deux séries présentent l'un avec l'autre une différence plus grande que je ne l'aurais soupçonné, et cependant chacune d'elles donne des nombres bien concordants; on a obtenu en effet

	Le 14 juin.		Le 2 août.
	4,232		3,975
	4,179		3,947
Moyenne......	4,206	Moyenne......	3,961
Poids de l'air..	1,536	Poids de l'air..	1,431

J'ai examiné pas à pas ces expériences et les calculs qui s'y rapportent, sans pouvoir découvrir aucune source d'erreur. C'est là une de ces anomalies embarrassantes qu'on rencontre accidentellement dans toutes les recherches qui ont pour objet de si petites quantités.

Le même Tableau montre aussi que la quantité d'air entraîné décroît à mesure que le diamètre diminue. Ainsi une tige de 59 pouces de long et dont le diamètre est d'à peu près $\frac{4}{10}$ de pouce, entraîne avec elle près de 5 grains d'air; tandis qu'une autre de même longueur à peu près et de moins de $\frac{1}{6}$ de pouce d'épaisseur en entraîne à peine un demi-grain. Mais, bien que la tige la plus épaisse entraîne plus d'air que la plus fine, néanmoins l'effet sur la dernière est beaucoup plus considérable que sur l'autre. Les 4,904 grains d'air ajoutés au poids de la tige de cuivre ne réduisent la pesanteur spécifique de la masse oscillante que de 8,629 à 2,939; tandis que 479 millièmes de grain d'air ajoutés au poids de la tige d'acier abaissent la pesanteur spécifique de la masse oscillante de 7,687 à 1,024. Ce sont là les pesanteurs spécifiques qu'il faudrait employer dans les calculs de réduction au vide pour faire évanouir n [1].

Après avoir ainsi vérifié le fait de l'accroissement considérable de l'influence de l'air sur les tiges quand leur diamètre diminue, j'essayai ensuite de déterminer l'effet que produiraient différents corps attachés au bout de ces tiges. J'employai dans ce but les deux boules de laiton nos 3 et 6 dont j'ai parlé dans la première Partie de ce Mémoire; et j'y en ajoutai une troisième, de 3 pouces de diamètre, qui pesait 29114 grains (1887gr,56) et dont la pesanteur spécifique était 8,020. Le bout libre des tiges de laiton et d'acier se vissait dans ces boules; quant à la tige de cuivre, on l'y fixa au moyen d'une vis. Les résultats sont donnés dans le Tableau suivant. On y voit que, pour chacune des trois tiges, la valeur de n diminue quand on y suspend l'une quelconque des boules; mais la marche de ces valeurs ne paraît pas très régulière. En vérité, la conduite de ces expériences où les boules étaient fixées à l'extrémité des tiges exigeait une attention soutenue, en raison de la lenteur relative des oscillations et de la fréquence qu'elle produi-

(1) Je ne puis donner la loi exacte de variation des trois nombres de la dernière colonne ou du poids de l'air adhérent entraîné par chacune des tiges; on trouve cependant que ces nombres sont entre eux très approximativement comme les racines carrées des cubes des diamètres.

sait dans leurs coïncidences avec celles de l'horloge de temps moyen, à laquelle on comparait les pendules. Il se peut donc que ces expériences soient, par suite, sujettes à quelque incertitude (¹). Ainsi, dans le cas des tiges de laiton et d'acier, l'intervalle des coïncidences n'excédait pas *onze secondes;* mais, d'autre part, j'ai souvent pris comme résultat la moyenne de plusieurs milliers de coïncidences.

Quatorzième série.

Résultats obtenus avec les boules fixées à l'extrémité des longues tiges.

Tige de cuivre.

Diamètre des boules.	Nos.	n.	Poids total de l'air adhérent.	Poids de l'air dû à la boule seule.
po 0,00 (²)	42	2,932	4,904	»
1,46	45	2,458	4,564	0,342
2,06	46	2,234	5,076	1,273
3,03	47	1,873	6,425	3,251

Tige de laiton.

Diamètre des boules.	Nos.	n.	Poids total de l'air adhérent.	Poids de l'air dû à la boule seule.
po 0,00 (²)	43	4,083	1,484	»
1,46	48	2,356	1,417	0,463
2,06	49	1,982	1,973	1,157
3,03	50	1,933	4,868	4,066 (³)

Tige d'acier.

Diamètre des boules.	Nos.	n.	Poids total de l'air adhérent.	Poids de l'air dû à la boule seule.
po 0,00 (²)	44	7,530	0,479	»
1,46	51	2,344	0,834	0,607 (³)
2,06	52	1,793	1,259	1,063
3,03	53	1,759	3,670	3,480

(¹) Si l'on trouvait utile de répéter ces expériences avec plus de précision, il faudrait s'arranger pour rendre les coïncidences moins rapides, en modifiant la marche de l'horloge de temps moyen; ce que je n'ai pas voulu faire pendant le cours de mes expériences.

(²) La première ligne de chacun de ces trois Tableaux reproduit les résultats déjà donnés précédemment et relatifs au cas où la tige ne porte pas de boule. Je les rappelle ici afin d'en faciliter la comparaison avec ceux que donnent les tiges chargées de boules. J'agirai de même dans la suite.

(³) Les deux expériences faites avec les pendules nos 50 et 51 sont très peu

Bien qu'il y ait dans ces expériences les éléments suffisants pour établir les fondements des principes que nous cherchons, cependant, pour les raisons que j'ai déjà dites, ce n'est pas elles que je choisirai pour en déduire certaines conséquences très délicates, lorsque je les compare à d'autres faites dans des circonstances plus favorables.

Si l'on examine les valeurs du poids de l'air adhérent qu'entraînent les pendules composés, formés par les boules fixées à l'extrémité des différentes tiges, on y remarque quelques anomalies apparentes, particulièrement pour les nos 45 et 48, où le poids de cet air semble moindre quand on a ajouté les boules que lorsque la tige oscillait seule. Mais il ne faut pas perdre de vue que le poids de l'air adhérent calculé pour chacun des pendules est supposé dans chaque cas appliqué au centre de giration, qui varie d'un pendule à un autre, et que par conséquent ce poids exige une correction. La colonne voisine, qui donne le poids dû à la sphère toute seule, calculé d'après la formule de la page 234, montre un meilleur accord entre les résultats et fait mieux ressortir la quantité que nous cherchons à déterminer.

En vue d'obtenir une plus grande exactitude sur les points en question, je me résolus à déterminer l'effet qu'on obtiendrait en plaçant les sphères au centre d'oscillation des tiges ou très près de ce centre. On évitait par là l'inconvénient déjà signalé du changement des intervalles des coïncidences, et l'on rendait les résultats plus certains. Dans ce but, je divisai la tige de laiton et celle d'acier en deux parties inégales, en les coupant au centre même ou très près du centre d'oscillation; il n'y avait plus qu'à visser la portion la plus longue au sommet de la boule, et la portion la plus courte au bas de la boule. Seulement, comme la longueur totale du pendule eût été alors plus grande que celle des tiges de tout le diamètre de la sphère intercalée, je retranchai 1 pouce de chacune

satisfaisantes, et sont marquées telles dans mon Journal d'observations. Je me proposais de les reprendre, puis elles furent oubliées jusqu'à une époque où il était trop tard pour m'en occuper. Je proposerai de les rejeter entièrement.

des portions, de manière à ramener la longueur du pendule, de l'arête du couteau jusqu'à son extrémité inférieure, à être à très peu près égale, avec la boule intercalée, à la longueur primitive de la tige. Les deux portions ainsi raccourcies des tiges étaient respectivement de 36,4 pouces ($924^{mm},5$) et de 18,0 pouces ($457^{mm},2$). La tige de cuivre était la propriété de M. Troughton et ne put être coupée comme les autres. J'obtins avec les sphères ainsi disposées les résultats suivants :

Quinzième série.

Résultats obtenus avec les sphères placées au centre d'oscillation des longues tiges.

Tige de laiton.

Diamètre des sphères.	Nos.	*n*.	Poids de l'air adhérent.	Poids de l'air dû à la boule seule.
po 0,00 (1)	43	4,085	1,484	»
1,46	54	2,722	1,749	0,446
2,06	55	2,186	2,352	1,180
3,03	56	1,870	4,528	3,382

Tige d'acier.

Diamètre des sphères.	Nos.	*n*.	Poids de l'air adhérent.	Poids de l'air dû à la boule seule.
po 0,00	44	7,530	0,479	»
1,46	57	2,248	0,774	0,405
2,06	58	1,863	1,367	1,039
3,03	59	1,774	3,749	3,371

Ces expériences confirment les résultats de la série précédente, en ce qu'ils montrent qu'en fixant la boule au centre d'oscillation des tiges on diminue aussi la valeur de *n*. Mais ici les valeurs suivent une marche bien plus régulière; cela tient à ce que les intervalles des coïncidences se prêtaient mieux à une observation correcte. Elles nous donnent, en conséquence, les moyens de déduire, avec une grande probabilité d'exactitude, le poids d'air adhérent à chaque boule et entraîné par elle, indépendamment de la tige. Ces poids sont donnés dans le Tableau précédent; je les

(1) Voir la note (2) de la page 238.

ai calculés par une formule que je vais donner tout à l'heure, en supposant que les poids d'air entraînés par les tiges de laiton et d'acier sont donnés avec exactitude par la 13e série d'expériences. Le Tableau suivant présente ces poids autrement disposés :

Tiges.	Diamètre des sphères.		
	1,46	2,06	3,03
Laiton	0,446	1,180	3,382
Acier..................	0,405	1,039	3,371
Moyenne	0,425	1,109	3,377

Les quantités d'air entraîné par les deux portions séparées de la tige, soit que la séparation en fût réelle comme dans le cas actuel, soit que l'influence de la portion correspondante sur l'air ambiant fût annulée par la présence de disques, comme dans la 18e et la 19e série d'expériences, ont été calculées, aussi bien que les distances à l'axe de suspension des centres de giration des deux portions de la tige, à l'aide de la formule suivante, qui m'a été obligeamment communiquée par le Professeur Airy [1].

« Soit r le poids de l'air entraîné par 1 pouce de la tige, $\frac{1}{56,4}$, dans le cas présent, de la quantité totale entraînée par la tige d'après la 13e série des expériences; et supposons que l'une quelconque des tiges commence à x pouces de l'axe de suspension et se termine à y pouces du même axe; l'effet de l'air adhérent à cette tige aura pour expression $\frac{r}{3}(y^3 - x^3)$. Il est le même que si la quantité totale de l'air, ou $r(y-x)$, se trouvait fixée à la distance $\sqrt{\frac{y^3 - x^3}{3(y-x)}}$, c'est-à-dire à la distance du centre de giration de la tige à l'axe de suspension. L'effet de l'air adhérent à plusieurs tiges semblables sera représenté par $\frac{r}{3}\sum(y^3 - x^3)$. Par suite, le rapport de cette quantité à celle qu'entraînerait une tige qui aurait, sans aucune interruption d'un bout à l'autre, une lon-

(1) Je suis redevable au Professeur Airy, non seulement de ces formules et d'autres encore dont j'ai fait usage dans ce Mémoire, mais encore de bien des idées et des conseils dans tout le cours de mon travail; c'est à l'encouragement que j'ai reçu du vif intérêt qu'il a toujours pris à mes recherches, que je dois de leur avoir donné toute l'extension qu'elles ont prise.

gueur égale à celle de l'ensemble, sera celui de $\frac{r}{3}\sum(y^3-x^3)$ à $\frac{r}{3}(Y^3-X^3)$, Y et X étant les distances des deux bouts de la tige entière à l'arête du couteau. On déduit de là, pour le poids de l'air adhérent qu'il faut introduire dans la formule (10), l'expression

$$\alpha = r(Y-X)\frac{\Sigma(y^3-x^3)}{Y^3-X^3}. \tag{11}$$

» La distance du centre de giration à l'axe de suspension, pour un système de tiges, est d'ailleurs

$$a=\sqrt{\frac{\Sigma(y^3-x^3)}{3\Sigma(y-x)}}.$$

» Dans ces deux formules il faut faire $x=0$, si la tige commence à l'arête même du couteau ([1]). »

Les valeurs trouvées ci-dessus sont à fort peu près, quoique pas tout à fait, proportionnelles aux cubes des diamètres, mais il se pourrait que les résultats dépendissent de quelque autre élément encore inconnu; ainsi un peu d'air pourrait adhérer aux parois latérales de la sphère et être entraîné par elle. En tout cas, il importait, dans ces recherches, d'avoir la mesure exacte de ces trois boules de laiton; je les examinai avec plus de soin, et je trouvai pour les diamètres les valeurs 1,465, 2,065 et 3,030 pouces ($37^{mm},2$, $52^{mm},4$ et $77^{m},0$). Le poids de l'air entraîné était donc presque exactement, pour les deux dernières, proportionnel aux cubes des diamètres, et pour les deux premières, il n'en différait pas d'une façon appréciable. En fait, si les poids d'air avaient été 0,387, 1,084 et 3,422 grains, l'hypothèse se fût trouvée précisement satisfaite. Il est bon de remarquer que, dans le cas des sphères n°s 1 à 7, suspendues à un fil (*voir* le Tableau de la p. 225), et du n° 66 de la série qui va suivre, si l'on considère le poids de l'air, entraîné par le fil seul, comme égal à 0,10 grain ($0^{gr},006$), et si l'on retranche ce poids successivement du poids moyen de l'air entraîné par chacune des boules de 1,46 pouce et 2,06 pouces

---

([1]) C'est de cette manière que j'ai calculé le poids de l'air adhérent, non seulement pour les sphères de la 15e série d'expériences, mais aussi pour les cylindres et les disques des 17e, 18e et 19e séries.

donné dans le même Tableau, et par la sphère de laiton de 3,03 pouces tel qu'il est donné dans la série suivante, on obtient 0,373, 1,040 et 3,444 pour le poids d'air entraîné par les sphères seules. Je puis donc, en somme, considérer l'hypothèse comme très voisine de la vérité, et prendre pour expression générale de la quantité d'air entraînée par un pendule formé d'une boule suspendue à un fil ou à une tige la formule suivante

$$R + 0^{\text{grain}},123\,d^3,$$

où d représente le diamètre de la sphère en pouces et R la quantité d'air entraînée par la tige ou le fil. Si, dans le cas d'une boule suspendue à un fil fin, formant un pendule à secondes, on suppose R = 0,10 grain, comme il a été dit, cette formule devient

$$0,002564\,l + 0,123\,d^3,$$

l étant la longueur du fil en pouces.

Ces valeurs ne diffèrent pas sensiblement de celles qu'on a obtenues pour les mêmes boules fixées à l'*extrémité* des longues tiges, dans la 14e série des expériences. Mais j'ai déjà dit que les conditions dans lesquelles ont été faites ces expériences étaient moins favorables, et qu'on ne peut accorder aux résultats le même degré de confiance qu'à ceux de la série actuelle. On va voir qu'elles s'accordent mieux néanmoins avec la série suivante, où les boules étaient fixées à l'*extrémité* de tiges *courtes*.

Je dévissai ensuite la tige inférieure des boules, qui restèrent suspendues à la tige supérieure et me donnèrent des pendules à peu près de même longueur que les nos 3 et 6 de la première Partie de ce Mémoire, auxquels mon intention était de les comparer. Et comme la boule de laiton de 3 pouces n'avait pas été encore mise en oscillation au bout du fil de fer, je fis d'abord quelques expériences avec ce mode de suspension, en vue expresse de la comparaison que je projetais (1). Voici les résultats des expériences :

(1) Le fil de fer employé avec cette boule pesante avait 0,023 pouce (0mm,58) de diamètre; sa grosseur était donc à peu près le tiers de celle du fil d'acier, et à peu près aussi le double de celle du fil employé dans les expériences sur les pendules n° 1 à n° 20. Il pesait 26 grains (1gr,68).

Seizième série.

Tige de laiton.

Diamètre des boules.	N°.	n.	Poids de l'air adhérent.	Poids relatif à la sphère seule.
po 1,46	60	2,198	1,047	0,465
2,06	61	1,901	1,513	1,078
3,03	62	1,830	4,202	3,719

Tige d'acier.

Diamètre des boules.	N°.	n.	Poids de l'air adhérent.	Poids relatif à la sphère seule.
po 1,46	63	1,904	0,537	0,410
2,06	64	1,785	1,227	1,104
3,03	65	1,779	3,720	3,587

Fil de fer.

Diamètre des boules.	N°.	n.	Poids de l'air adhérent.	Poids relatif à la sphère seule.
po 1,46	3	1,834	0,457	0,357
2,06	6	1,751	1,140	1,040
3,03	66	1,748	3,544	3,444

Si l'on compare les résultats donnés par les tiges courtes de laiton et d'acier à ceux qu'ont donnés les mêmes boules suspendues au bout des tiges longues, et que l'on trouve à la page 238, on voit qu'en ce qui regarde la valeur de n, elle est, à une légère exception près, plus grande pour les longs pendules que pour les pendules courts; mais la différence paraît dépendre surtout des grosseurs relatives des boules et des tiges. Quant au poids de l'air adhérent, je regrette de n'avoir pu faire osciller dans de bonnes conditions les tiges courtes débarrassées de leurs boules; cela m'eût donné le moyen de vérifier, conformément à la formule de la page 234, si le poids de l'air adhérent à chaque boule ou entraîné par elle, était le même dans cette série d'expériences que dans la précédente. Mais si l'on admet que le poids de l'air entraîné par ces tiges courtes est proportionnel à leur longueur, et si l'on introduit dans la formule citée plus haut les valeurs ainsi calculées, on trouve pour le poids relatif à la sphère seule, quand elle est fixée aux tiges de laiton ou d'acier, la valeur que donne le Tableau précé-

dent. Les valeurs relatives aux sphères suspendues au fil de fer sont calculées dans l'hypothèse que le poids de l'air entraîné par le fil est 0,10 grain, comme on l'a déjà dit. Ces valeurs, aussi bien que la plupart de celles qui se déduisent de la 14e série d'expériences, s'accordent très bien avec celles que l'on a obtenues pour les sphères fixées au centre d'oscillation. L'ensemble fait voir que l'effet de l'air sur un pendule formé d'une boule suspendue à une tige mince ou à un fil, bien que dû surtout à la boule, est en partie dû aussi au fil lui-même; mais que cette influence du fil diminue en même temps que son diamètre, de sorte que, quand il est excessivement fin, elle se réduit probablement à une petite quantité constante, à peu près de même valeur dans la plupart des cas qui se rencontrent dans la pratique ([1]).

Afin d'apporter de nouvelles lumières sur le sujet qui nous occupe, au cas où les corps oscillants présentent d'autres formes, je fis faire trois nouveaux cylindres de laiton, qui, avec le cylindre n° 10 de la première Partie de mon Mémoire, furent l'objet d'une nouvelle série d'expériences. Les diamètres de tous ces cylindres étaient exactement les mêmes, 2,06 pouces ($52^{mm},3$), et leurs hauteurs étaient respectivement 2,06 pouces, 1,00, 0,50 et 0,18 pouce ($52^{mm},3$, $25^{mm},4$, $12^{mm},7$ et $4^{mm},6$). J'ai fait choix de ce dernier nombre, parce que c'était précisément le diamètre de la tige de laiton. Le cylindre de 1 pouce pesait 6611 grains ($428^{gr},39$), et sa pesanteur spécifique était 7,805; celui de $\frac{1}{2}$ pouce pesait 3352 grains ($217^{gr},21$), avec une pesanteur spécifique de 8,116; et enfin celui de 0,18 pouce pesait $1266\frac{1}{2}$ grains ($82^{gr},07$), et sa densité était 8,145. J'ai donné déjà les dimensions de l'autre cylindre. Tous ces cylindres furent percés, sur leur pourtour, de deux trous opposés et taraudés, pour recevoir les deux portions inégales des tiges dont j'ai parlé précédemment. De la sorte, les cylindres étaient placés à très peu près au centre d'oscillation de la longueur totale de la tige. On mit ces cylindres en oscillation, les bases verticales et perpendiculaires au plan d'oscillation, comme on l'avait fait

---

([1]) C'est ce qui ressort de la très faible différence des quantités d'air entraînées par la tige d'acier et par le fil de fer, dans cette série d'expériences. De plus, dans le cas de la boule d'ivoire (n° 4) suspendue par un fil d'argent très fin, le résultat est exactement la moyenne de ceux des autres boules suspendues à un fil de fer beaucoup plus gros.

pour le pendule n° 12 dans la première Partie de ce travail. On a obtenu les résultats suivants :

Dix-septième série.

Résultats obtenus avec les cylindres de 2 pouces placés au centre d'oscillation des longues tiges.

Tige de laiton.

Diamètre des cylindres.	N°.	n.	Poids de l'air adhérent.	Poids relatif au cylindre seul.
po 0,00 (1)	43	4,083	1,484	»
0,18	67	5,547	2,852	1,284
0,50	68	3,941	2,942	1,523
1,00	69	2,892	2,972	1,681
2,06	70	2,141	3,111	1,902

Tige d'acier.

Diamètre des cylindres.	N°.	n.	Poids de l'air adhérent.	Poids relatif au cylindre seul.
po 0,00 (1)	44	7,530	0,479	»
0,18	71	7,694	1,806	1,350
0,50	72	4,136	1,900	1,490
1,00	73	2,745	2,046	1,661
2,06	74	1,988	2,309	1,946

Nous constatons ici un accroissement régulier de la valeur de n, à mesure que l'épaisseur du cylindre diminue, jusqu'à ce que cette épaisseur s'approche d'être égale au diamètre de la tige, auquel cas l'effet du cylindre sur la valeur de n disparaît, si bien que le résultat redevient ce qu'il était pour la tige seule sans cylindre. Passé ce point, le diamètre du cylindre devenant égal à celui de la tige ou moindre que ce diamètre, l'influence du cylindre devient positive, et la valeur de n est alors plus grande que lorsque la tige oscille débarrassée de tout appendice. Si nous ne nous occu-

(1) *Voir* la note (2) à la page 238. Il faut remarquer ici que, dans cette première ligne horizontale, la tige est supposée débarrassée de tout cylindre; par conséquent, ces valeurs ne sont pas directement comparables avec le reste des Tableaux.

pons pas de la valeur de n, pour concentrer notre attention sur la quantité d'air qui adhère aux pendules et est entraînée avec eux, nous voyons qu'elle varie avec le diamètre des cylindres. Et en suivant la même marche que dans le cas des boules (*voir* p. 241), nous obtenons, pour le poids de l'air entraîné par les cylindres seuls, les valeurs du Tableau précédent. La comparaison de ces valeurs est plus commode en les disposant comme il suit :

	Diamètre des cylindres de 2 pouces.			
	0,18.	0,50.	1,00.	2,06.
Tige de laiton.	1,284	1,523	1,681	1,902
Tige d'acier.	1,350	1,490	1,661	1,946
Moyenne	1,317	1,506	1,671	1,924

Les différences de ces valeurs moyennes devraient représenter l'augmentation de la quantité d'air entraînée par les *parois* d'un cylindre du diamètre donné, à mesure que ce diamètre augmente; mais elles ne paraissent pas suivre une marche très régulière, car les cylindres de faible diamètre entraînent plus d'air en proportion que ceux qui sont plus épais. Tant que ce fait ne sera pas pleinement vérifié, nous ne pourrons déduire de l'expérience une formule générale correcte pour déterminer la quantité d'air entraînée par des cylindres de différents diamètres ou épaisseurs, mis en oscillation de la manière qui vient d'être dite.

La série d'expériences suivante a été faite avec des disques circulaires minces en laiton, de l'épaisseur à peu près d'un fort papier à lettre. Vingt morceaux de la même pièce de laiton, fortement serrés les uns contre les autres, formaient une épaisseur de 0,08 pouce (2^{mm},03); chaque disque pouvait donc avoir une épaisseur de 0,004 pouce (0^{mm},10). Un de ces disques aurait dû avoir 2,06 pouces de diamètre pour correspondre avec les cylindres précédents; en réalité, il était un peu plus large, 2,07 pouces (52^{mm},6), et il pesait 28 grains (1^{gr},81). Le deuxième avait 3,01 pouces (76^{mm},5) de diamètre et pesait 57,5 grains (3^{gr},73), et le troisième avait 4 pouces (101^{mm},6) de diamètre et un poids de 106,5 grains (65^{gr},22). Leur pesanteur spécifique fut trouvée de 8,450. La longue tige de laiton (c'était la seconde tige de 56,9 pouces citée dans la note de la page 236) fut percée d'un trou taraudé à la

distance de 38 pouces (965^{mm},2) de l'arête du couteau, et l'on y fixa successivement les trois disques. Les pendules ainsi formés furent mis en branle, la face plane des disques étant perpendiculaire au plan d'oscillation. On ne put pas faire usage en cette occasion de la longue tige d'acier, non pas tant parce qu'il était peu commode d'y fixer les disques que parce qu'elle revenait trop vite au repos.

Dix-huitième série.

Résultats obtenus avec les disques minces de laiton placés près du centre d'oscillation de la longue tige de laiton (1).

Diamètre du disque.	N°.	n.	Poids de l'air entraîné.	Poids de l'air relatif au disque seul.
po 0,00 (2)	43	4,083	1,484	»
2,07	75	7,439	3,111	1,405
3,01	76	14,362	6,511	4,185
4,00	77	27,033	12,873	9,367

Dans ces expériences, on voit la valeur de n et aussi le poids de l'air *entraîné* par le pendule croître en même temps que le diamètre du disque. Pour calculer les nombres de la dernière colonne, il a fallu tenir compte de la diminution de longueur de la portion de la tige qui agit efficacement : on a supposé que la quantité d'air entraînée par la tige était, dans chaque cas, proportionnelle à la longueur totale, diminuée du diamètre du disque. On voit que le poids de l'air entraîné par des disques minces est à peu près proportionnel au cube du diamètre; de sorte que l'expression générale de la quantité totale entraînée par le pendule est

$$R + 0^{grain},149d^3,$$

R et d ayant les mêmes significations que précédemment.

Pour compléter ces recherches sur l'influence des disques, je fis percer dans la même tige de laiton trois trous de vis, l'un à

---

(1) Par suite d'une méprise, tous ces disques avaient été fixés $\frac{8}{10}$ de pouce (20^{mm},3) *au-dessus* du centre d'oscillation. On a tenu compte de ce déplacement dans le calcul du poids d'air relatif au disque seul.

(2) *Voir* la note (2) de la page 238.

5,01 pouces (129mm,5) de l'arête du couteau : c'était le point le plus élevé où l'on pût fixer les disques; un autre à 30,0 pouces (762mm,0) de la même arête, à peu près au centre de gravité de la tige; et le dernier à 57,3 pouces (1455mm,4), tout près du bout inférieur de la tige. On fixa successivement le disque de 2,07 pouces à chacune de ces distances, et l'on fit osciller le pendule comme précédemment, la face plate du disque perpendiculaire au plan d'oscillation. Voici les résultats de ces expériences, auxquels je joins celui du n° 75 de la série précédente.

Dix-neuvième série.

Résultats obtenus avec le disque mince en laiton de 2 pouces, placé à différentes distances du couteau sur la longue tige de laiton.

Distance au couteau.	N.	n.	Poids de l'air adhérent.	Poids de l'air relatif au disque seul.
po 0,00	43	4,083	1,484	»
5,1	78	4,155	1,523	»
30,0	79	6,115	2,457	1,330
38,0	75	7,439	3,111	1,405
57,3	80	12,124	5,368	1,426

Les différences entre les poids de l'air entraîné présentent, à première vue, des anomalies singulières, surtout lorsqu'on considère que la pesanteur spécifique d'oscillation de la masse et le poids du pendule restent exactement identiques dans tous les cas. Mais il ne faut pas oublier que ces poids de l'air entraîné sont supposés, dans la formule de la page 224, appliqués au centre de giration, et que, si nous voulons déterminer l'effet dû au disque seul, il nous faut recourir à la formule de la page 234. C'est de cette manière que j'ai obtenu les résultats inscrits dans la dernière colonne du Tableau précédent. La moyenne des trois dernières valeurs donne, pour le poids de l'air entraîné par le disque seul, le nombre 1,387 grains. Je n'ai pas compris dans ce calcul le cas où le disque était à seulement 5,1 pouces de l'arête du couteau, parce qu'il est impossible d'accorder quelque confiance au résultat, en raison de la grandeur du coefficient par lequel il est multiplié. En fait, si le poids de l'air entraîné, dans cette position du disque, était seulement 1,466 au lieu de 1,523, il y aurait concordance

exacte du poids relatif au disque seul avec la moyenne des autres nombres.

Comme j'étais désireux de varier ces expériences autant que possible, j'essayai ensuite l'effet de deux des cylindres les plus plats parmi ceux que j'ai mentionnés ci-dessus, et qui avaient le même diamètre que le disque des expériences précédentes. Leurs hauteurs étaient respectivement 0,18 et 0,50 pouce. Mon but était de voir s'ils donneraient la même loi. Ces cylindres furent vissés à l'*extrémité* de la longue tige de laiton, et on les fit osciller, comme dans la série précédente, leurs bases planes perpendiculaires au plan d'oscillation. On obtint les résultats suivants :

Vingtième série.

Résultats obtenus avec les cylindres de 2 pouces fixés à l'extrémité de la longue tige de laiton.

Hauteur des cylindres.	N°.	*n*.	Poids de l'air adhérent.	Poids relatif au cylindre seul
po 0,00	43	4,083	1,484	»
0,18	81	6,216	3,590	1,389
0,50	82	4,046	3,117	1,628

Ces résultats sont un peu plus forts que ceux qui ont été déduits des expériences faites sur les mêmes cylindres dans la 17e série; il faudrait répéter ici la remarque déjà faite à la page 239. En fait, si je me reporte au registre d'observations, je trouve que les intervalles des coïncidences n'étaient que de 14^s; et je crains qu'on n'ait pas pris un nombre de ces coïncidences suffisant pour assurer le degré de précision requis dans des recherches aussi délicates. En conséquence, je donne la préférence aux résultats de la série précédente.

Les deux dernières séries d'expériences auxquelles je me suis livré ont été forcément très limitées, par la raison que les dimensions de mon appareil à observer dans le vide ne m'ont pas permis de les étendre autant que je l'aurais voulu. Elles ont été instituées dans le but de déterminer la différence des résultats que donnent les cylindres et les disques minces de laiton, suivant qu'on les fait osciller la tranche en avant, ou de la manière dont ils avaient déjà

été employés, les faces plates opposées à la direction du mouvement. On a choisi dans ce but les deux cylindres de la série précédente et les deux disques de 2,07 pouces et 3,01 pouces de diamètre. Les deux cylindres furent, comme précédemment, vissés à l'*extrémité* de la longue tige de laiton, afin de comparer les résultats à ceux de la série précédente ; les deux disques furent vissés à cette même tige, mais à 38 pouces de l'arête du couteau, afin de comparer les résultats à ceux du n° 75 de la 18e série. Voici les divers résultats obtenus :

VINGT ET UNIÈME SÉRIE.

Résultats obtenus avec les cylindres de deux pouces, placés de champ, à l'extrémité de la longue tige de laiton.

Hauteur des cylindres.	N°.	n.	Poids de l'air adhérent.	Poids de l'air entraîné par le cylindre seul.
po				
0,00	43	4,083	1,484	»
0,18	83	2,771	1,219	0,149
0,50	84	2,208	1,239	0,353

VINGT-DEUXIÈME SÉRIE.

Résultats obtenus avec les disques minces de laiton, fixés, la tranche en avant, près du centre d'oscillation de la longue tige de laiton.

Diamètre du disque.	N°.	n.	Poids de l'air entraîné.	Poids de l'air entraîné par le disque seul.
po				
0,00	43	4,083	1,484	»
2,07	85	4,291	1,588	0,091
3,01	86	4,472	1,675	0,168

Ces expériences confirment la remarque déjà faite, que les parois latérales du corps oscillant contribuent très peu à l'entraînement de l'air qui a un si remarquable effet sur le mouvement du pendule. Dans cette dernière série, comme dans la 18e, les disques étaient placés à $\frac{8}{10}$ de pouce ($20^{mm},3$) au-dessus du centre d'oscillation. J'ai tenu compte de cette circonstance dans le calcul du poids de l'air entraîné par le disque seul ; et je

dois faire remarquer aussi que l'on a employé dans ces calculs l'*effet total* de la tige ; il est évident, en effet, que, dans sa position nouvelle, le disque n'empêche l'action sur l'air d'aucune portion de cette tige.

Résultats généraux des expériences additionnelles.

Je suis obligé de clore ici la relation de mes expériences additionnelles. Je les ai poursuivies jusqu'à la limite du dernier délai que pouvait me laisser l'imprimeur, désireux que j'étais de faire connaître tout d'une fois l'ensemble des données qu'il m'était possible de fournir sur un sujet aussi intéressant. Il ne me reste que le temps nécessaire pour présenter quelques courtes remarques sur les résultats obtenus.

On voit d'abord que ces résultats s'accordent tous avec l'hypothèse que tout pendule en mouvement entraîne avec lui une certaine quantité d'air qui, devenant partie intégrante du corps oscillant, en diminue la pesanteur spécifique ou, plus exactement, en augmente l'inertie. Cet air adhérent est, presque en totalité, confiné sur les deux portions opposées du pendule qui se trouvent dans la direction du mouvement, tout comme cela a lieu pour un corps qui se meut dans une eau tranquille ; les parties latérales n'en entraînent qu'une très faible portion. La forme de cette enveloppe fluide épousera, en conséquence, dans une certaine mesure, la forme du pendule, tout en restant soumise à quelques légères modifications dont la nature nous est cependant encore à peu près inconnue. La quantité d'air ainsi entraînée par un pendule semble dépendre de l'étendue et de la forme de la surface par laquelle il rencontre l'air, et n'est pas affectée par la densité du corps en mouvement.

Dans le cas d'une sphère de 1 pouce de diamètre ($25^{mm},4$), suspendue à un fil fin, le poids de l'air entraîné par la sphère seule est à peu près de 0,123 grain troy ($0^{gr},008$); et pour des sphères de diamètre différent, il est approximativement proportionnel au cube de ce diamètre. Le poids de l'air entraîné par le fil, dans un pendule battant la seconde, peut s'élever à 0,10 grain ($0^{gr},006$), mais probablement ne dépasse pas cette valeur, et peut-être est-il à peu près constant pour tout fil *fin* de cette longueur. Il s'ensuit

qu'avec de petites sphères, de moins de 1 pouce de diamètre, le poids de l'air entraîné par le *fil* est à fort peu près le même que celui de l'air entraîné par la *boule* du pendule.

Pour les *cylindres* suspendus à des tiges et dont les faces plates sont perpendiculaires au plan d'oscillation, la loi de variation de la quantité d'air entraînée n'est pas aussi manifeste ; car nous ignorons jusqu'ici l'effet exact produit par la *surface courbe* du cylindre. Nous n'avons pas non plus obtenu des données suffisantes pour connaître complètement l'influence de l'air sur des cylindres suspendus par des fils ou des tiges et oscillant avec leurs bases horizontales, tels que sont les pendules nos 10 et 14. Ainsi, le cylindre de 4 pouces (*voir* p. 225) entraîne *beaucoup plus* du double de la quantité d'air qu'entraîne le cylindre de 2 pouces, bien qu'ils aient tous deux exactement le même diamètre. Ces expériences sont d'ailleurs les seules que j'aie faites sur ce point particulier.

Quant aux cylindres très aplatis ou aux *disques* mis en oscillation avec leurs faces plates perpendiculaires à la direction du mouvement, le poids de l'air entraîné par un disque de 1 pouce de diamètre paraît être de 0,149 grain ($0^{gr},0097$); et pour des disques différents, il semble augmenter comme le cube du diamètre. D'où il suit qu'un *disque* mince entraîne *plus d'air* qu'une *sphère* de même diamètre.

La quantité d'air entraînée par des sphères étant proportionnelle au cube de leurs diamètres, j'ai été conduit à examiner si les quantités entraînées par une sphère et par un cylindre de même diamètre et de même hauteur seraient entre elles comme leurs volumes, dans le rapport de 1 à $1\frac{1}{2}$. Mais, de la comparaison des pendules n° 6 et n° 10 (*voir* p. 225), il ressort que le cylindre en entraîne une quantité proportionnellement plus grande, d'à peu près $\frac{1}{8}$ de la quantité totale.

Si l'on compare les résultats donnés par les pendules nos 10 et 13 (*voir* p. 225), il semblerait que la différence des quantités d'air entraînées devrait être celle qui est due à la différence des effets produits par le fil et par la tige. Mais il ne faut pas oublier ce qui a été dit à la page 234, relativement aux corps suspendus à l'*extrémité* d'une tige ou d'un fil ; il est nécessaire de les ramener, par la formule donnée en cet endroit, à une même position ; c'est

seulement alors que le poids de l'air adhérent, relatif au *cylindre seul,* est à peu près le même dans les deux expériences.

En résumé, il ressort de toutes les expériences que, même dans le cas où un pendule est formé uniquement de matières ayant toutes la même densité, s'il n'est pas de même forme en tous les points, chaque partie de ce pendule doit faire le sujet d'un calcul distinct, lorsqu'on veut en déterminer exactement la pesanteur spécifique *d'oscillation;* chaque partie, en effet, est différemment influencée par l'air environnant. Prenons pour exemple le cas du pendule n° 3, dans lequel le fil de fer et la boule de laiton ont presque exactement la même densité, 7,66. Si nous supposons que la boule entraîne 0,40 grain d'air et le fil 0,10 grain, à peu près le quart de ce qu'entraîne la boule, la pesanteur spécifique de la boule avec son enveloppe d'air sera réduite à 4,43 environ, et celle du fil également avec son enveloppe d'air à 0,14 à peu près. Il suit de là que la pesanteur spécifique d'oscillation du pendule entier, calculée d'après la formule (2) de la page 193, sera environ 4,21; ce qui donnerait une réduction au vide égale à $13^s,380$, à très peu près la correction vraie donnée dans le Tableau de la page 225. Si, au contraire, l'on avait négligé l'effet de l'air sur le fil, cette valeur se serait trouvée diminuée de 1^s à peu près ; ce qui démontre que, si l'on veut faire des expériences sur un semblable pendule *dans l'eau,* il est indispensable, pour la correction des résultats, que la totalité du fil soit immergée dans le liquide.

En terminant ces expériences, je n'ose me flatter qu'il ne m'a échappé aucune erreur, surtout si je considère le grand nombre de calculs auxquels mes recherches ont donné lieu. La majeure partie de ces calculs a cependant été revue, en particulier ceux qui mettaient en relief quelque anomalie notable; je puis donc espérer qu'il ne s'y trouvera point d'erreur importante. Dans la suite des expériences, les différentes pièces des appareils ont subi de temps en temps des modifications, afin de les approprier aux différents cas que l'on voulait examiner ; il peut donc s'être introduit dans les densités, les longueurs et les poids comparatifs de légères différences qui ont passé inaperçues, et dont il n'a pas été tenu compte dans les calculs. En vérité, le sujet était si entièrement neuf que, lorsque je commençais une série d'expériences, je n'étais pas toujours averti des points précis sur lesquels il était

le plus nécessaire de porter mon attention ; l'importance de certains détails ne ressortait souvent qu'après que les résultats avaient été obtenus. Si cependant il était désirable de répéter quelqu'une de ces expériences avec des modifications qui sembleraient propres à conduire à des résultats plus précis, je serais heureux d'en reprendre la recherche.

Expériences du chevalier du Buat.

On a vu que, dans toute la suite de ce travail, j'ai attribué à M. Bessel la première découverte de cette propriété particulière du pendule en mouvement, que mon Mémoire a pour objet d'élucider. Sans aucun doute, on ne peut lui contester le mérite d'avoir, le premier, appliqué ces principes au *pendule moderne*, de les avoir étudiés avec un soin et une habileté extrêmes, et d'avoir, par là, mis aux mains du physicien expérimentateur et théoricien un instrument rendu encore plus puissant et plus délicat. Mais il a été reconnu récemment que cette propriété du pendule avait été découverte près de cinquante ans auparavant et étudiée très nettement par le chevalier Du Buat dans ses *Principes d'Hydraulique*. Dans cet Ouvrage, dont la seconde édition a paru en 1786 [1], l'auteur cite les résultats de nombreuses expériences faites sur des pendules de divers genres, oscillant dans l'air et dans l'eau ; et il en déduit cette conclusion qu'une certaine quantité du fluide dans lequel le pendule oscille est *entraînée* par lui dans son mouvement et ralentit ainsi son oscillation. Il remarque que « si a désigne la longueur d'un pendule qui fait un nombre quelconque d'oscillations dans le vide, l la longueur du pendule qui ferait le même nombre d'oscillations dans le fluide, p le poids du corps en mouvement dans le fluide, P le poids du fluide déplacé par ce corps, $p+\mathrm{P}$ exprimera son poids dans le vide, et $\frac{p+\mathrm{P}}{p}$ sera le rapport de la gravité dans les deux cas ; d'où l'on déduit

$$l = a \times \frac{p}{p+\mathrm{P}}.$$

» La formule précédente donnerait exactement la longueur du

[1] La première édition (1779) ne contient pas les expériences auxquelles je fais allusion.

pendule dans un fluide, si le corps, en se mouvant, n'entraînait avec lui une certaine quantité du même fluide qui varie peu par la différence des vitesses ; de sorte que la masse en mouvement ne consiste pas seulement en la masse propre du corps, mais encore en celle du fluide entraîné (¹). » Il continue ainsi : « Soit n un nombre constant, tel que nP exprime dans ous les cas le poids du fluide déplacé et celui du fluide entraîné ; la masse en mouvement, ou son poids dans le vide, n'est plus égale à $p+\mathrm{P}$, mais elle est représentée par $p+n\mathrm{P}$, tandis que son poids dans l'eau est toujours exprimé par p. Il faut donc, pour l'exactitude de la formule, qu'elle devienne

$$l = a\,\frac{p}{n\mathrm{P}+p} = \frac{a}{\dfrac{n\mathrm{P}}{p}+1},$$

d'où l'on tire

$$n = \frac{p}{\mathrm{P}}\left(\frac{a}{l}-1\right). \text{»}$$

M. Du Buat donne ensuite le résultat de quarante-quatre expériences faites sur des pendules formés de boules de plomb, de verre et de bois de poids différents, oscillant au bout de fils de différente longueur. La conclusion à laquelle il arrive est que la valeur de n qui, dans ses expériences, varie de 1,67 à 1,45, à quatre légères exceptions près, peut être prise égale à 1,585. Cette valeur est certainement beaucoup plus proche de la vérité qu'on n'aurait dû l'attendre d'expériences qui paraissent bien grossières auprès des procédés d'observation plus modernes. Et bien qu'on ne puisse mettre le résultat de Du Buat en comparaison avec ceux des études précises de M. Bessel, ni avec ceux de mes propres recherches, il n'en démontre pas moins le grand talent et le génie de l'auteur qui a su tirer une valeur si approchée d'un mode d'expérience aussi primitif.

M. Du Buat donne aussi le résultat d'un très grand nombre d'expériences semblables faites sur les corps les plus variés, des cylindres, des prismes, des cubes, etc. ; et il déduit de chacune d'elles la confirmation complète de son idée sur l'entraînement du fluide au sein duquel ont lieu les oscillations. Et bien qu'il donne

(¹) Édition de 1816, t. II, p. 226. (*Voir* aussi la *Bibliographie*, p. B. 64.)

la valeur moyenne susdite de n comme pouvant s'appliquer à tous les pendules à boule, il soupçonne cependant que la quantité de fluide entraînée est un peu moindre pour les sphères plus grosses que pour les petites, et aussi qu'elle est moindre pour les pendules courts que pour les plus longs (1).

Mais n'est-ce pas un fait bien remarquable, dans l'histoire du point de la science qui nous occupe, que ces expériences de M. Du Buat, si importantes et si concluantes, qui avaient été entreprises par l'ordre et aux frais du Gouvernement français, soumises par le Ministre de la Guerre à l'examen de l'Académie royale de Paris, et honorées d'un Rapport favorable de cette Société; qui furent publiées pour la première fois en 1786, moins de dix ans avant les expériences de Borda sur la longueur du pendule (2), et qui avaient excité alors un si vif intérêt qu'elles servirent de texte au sujet de prix proposé l'année suivante par l'Académie, puis proposé de nouveau en 1791 avec l'offre d'une récompense double; qui avaient en ce temps attiré si vivement l'attention du public qu'une autre édition en parut en 1816, juste au moment où l'étude du pendule florissait à nouveau dans les États de l'Europe; qui avaient été traduites en allemand (3) et citées avec les plus grands éloges par les premiers savants de ce pays; qui avaient aussi été largement mises à contribution et discutées dans les Ouvrages anglais; n'est-il pas singulier que de telles expériences aient pu être si vite perdues de vue et si complètement oubliées qu'aucun des savants distingués, aujourd'hui engagés dans l'étude du pendule, n'ait eu la moindre idée, le moindre

(1) Ce soupçon se trouve confirmé par mes expériences, du moins au point de vue auquel se plaçait Du Buat. Car, bien que la quantité de fluide entraîné soit plus grande avec de grosses sphères que pour de plus petites, néanmoins le facteur n, que Du Buat semble avoir pris comme caractéristique, est, en effet, moindre. Le second point trouve sa confirmation non seulement dans mes propres résultats, mais également dans ceux de Bessel que j'ai cités dans la note (2) de la page 227.

(2) Il m'est impossible de fixer la date précise des expériences de Borda; car, bien que l'indication exacte soit donnée du mois, du jour et de l'heure à l'approximation d'une seconde, je n'ai pu trouver celle de l'année.

[J'ai donné cette date d'après Delambre (1792) en reproduisant le Mémoire de Borda et Cassini, t. IV de ce Recueil, p. 17. (C. W.)]

(3) Par J.-F. LEMPE, Leipzig, 1796. (*Voir* aussi les Ouvrages de LANGSDORF et autres.)

souvenir de la correction additionnelle pour la réduction au vide si clairement mise en évidence par M. Du Buat ; et qu'avant la réinvention du même principe par M. Bessel et l'apparition de son important Mémoire, personne n'ait songé à vérifier le soupçon, déjà énoncé par Newton, de l'existence possible d'un pareil effet (¹)? M. de Prony, dans sa *Nouvelle Architecture hydraulique*, et le Dr Young, dans ses *Lectures on natural Philosophy*, font de fréquentes allusions au travail de Du Buat ; et pourtant, bien que ces deux mathématiciens éminents se soient beaucoup occupés du pendule, ni l'un ni l'autre ne semble s'être rappelé les faits singuliers rapportés par cet auteur. M. Poisson lui-même, dans le dernier et excellent Mémoire qu'il a inséré dans la *Connaissance des Temps* de 1834, n'avait évidemment pas connaissance des faits établis par Du Buat, lorsqu'il commença son travail ; il y cite fréquemment, et avec justice, M. Bessel comme étant le premier qui ait appelé l'attention sur la véritable valeur de la correction. Et ce n'est que dans l'Appendice à son Mémoire qu'il discute les expériences de Du Buat, dont l'existence lui avait été signalée par une Note venue de l'étranger. Il est certes peu consolant pour le philosophe expérimentateur, qui a consacré tant de soins et de temps à l'étude d'une branche particulière de la Science, de penser que ses travaux peuvent ainsi tomber dans l'oubli, si vite et peut-être pour jamais.

Suspension sur un cylindre.

La majeure partie des expériences de M. Bessel sur le pendule ont été faites en suspendant la boule à un fil qui passait sur un cylindre d'acier dont le diamètre n'avait pas plus de 0,088 pouce ($2^{mm},2$). Désirant opérer de même avec quelques-uns de mes pendules, je suspendis de cette manière les sphères de plomb et d'ivoire nos 8 et 9; j'ai déjà donné les résultats de ces épreuves. Je procédai de la même façon avec quelques-uns des autres pendules ; mais, dans le cours de mes expériences, je découvris quelques

(¹) *Principia*, lib. II. prop. 27, cor. 2. [Le P. Boscovich avait indiqué plus nettement encore cet effet dans son Opuscule sur la détermination de la longueur du pendule à secondes, 1785. *Voir* l'*Introduction historique*, t. IV de ce Recueil, p. 15. (C. W.)]

anomalies dont je ne pus d'abord m'expliquer l'origine. Je reconnus enfin qu'elles tenaient uniquement au mode de suspension. C'est avec la longue tige cylindrique n° 21 que les discordances étaient le plus apparentes; car non seulement les intervalles des coïncidences consécutives différaient les uns des autres, en plus ou en moins, de 60ˢ, 70ˢ et même une fois de 90ˢ, mais l'amplitude variait aussi continuellement de la même manière, allant alternativement en diminuant et en augmentant. Afin de découvrir la cause de ces singulières anomalies, je montai un appareil qui permettait de mieux observer et de mieux surveiller le mouvement du pendule pendant ses oscillations. Je trouvai ainsi que, lorsque la boule était suspendue à un fil passant sur un cylindre, le mouvement de cette boule, primitivement rectiligne, dégénérait bientôt en une ellipse dont l'excentricité allait diminuant sans cesse, et dont le grand axe changeait constamment de position par rapport aux points cardinaux. Ces particularités suffisaient à expliquer les apparences que j'avais observées, et à ôter toute confiance dans les résultats d'expériences ainsi conduites. Et si j'ai conservé ceux des expériences faites de cette manière avec les pendules nᵒˢ 8 et 9, cela a été surtout pour montrer qu'une méthode incorrecte peut accidentellement conduire à des résultats très concordants, et qu'on ne peut trop minutieusement surveiller chaque point d'une étude aussi délicate.

Je désire cependant qu'il soit bien compris que ces remarques ne s'appliquent pas aux expériences de M. Bessel, qui diffèrent essentiellement des miennes en un point important : son fil, dans la partie où il passait sur le cylindre, était aplati à dessein, probablement pour éviter la difficulté même dont je viens de parler, tandis que le mien était rond, tel qu'on le vend dans le commerce. Je n'ai pas fait d'essai avec le fil aplati, mais j'ai pensé qu'il était bon de signaler les incorrections que peut amener l'emploi d'un fil rond, pour empêcher d'autres expérimentateurs de l'adopter sans s'être préalablement assurés du degré d'incertitude que les anomalies signalées tout à l'heure peuvent introduire dans les résultats des expériences. J'ajouterai, en terminant, que la suspension sur un couteau conserve invariable le plan des oscillations d'une boule pendant tout le temps qu'elle est en mouvement, sans qu'on y puisse découvrir aucune anomalie.

Influence des parois de l'appareil d'observation dans le vide.

Quelques personnes ont émis l'opinion que, dans les expériences de la nature de celles qui font le sujet de mon Mémoire, les résultats doivent probablement être altérés par cette circonstance que l'air au milieu duquel se font les oscillations est renfermé dans un espace clos. M. Poisson, dans l'important Mémoire que j'ai déjà cité, fait remarquer avec raison que les recherches analytiques supposent les oscillations s'exécutant au sein d'un fluide qui s'étend indéfiniment dans toutes les directions, circonstance qu'il est impossible de réaliser dans les expériences de ce genre. Mais il pense que, si le pendule est petit auprès des dimensions de l'espace dans lequel l'air est emprisonné, les résultats n'en sont pas affectés d'une manière sensible, et que cette influence est la plus petite quand la paroi est une surface courbe. Avec l'appareil de Greenwich dont le tube a environ 13 pouces (330^{mm}) de diamètre, le capitaine Sabine n'a pas trouvé de différence dans les résultats de quelques expériences instituées expressément en vue de manifester cette influence; et cependant la lentille de son pendule avait 6 pouces ($152^{mm},4$) de diamètre. De mon côté, j'ai trouvé que les résultats des nombreuses expériences faites sur les pendules formés d'une barre de métal oscillant dans l'intérieur de mon appareil sont en parfait accord avec celles que j'avais faites à l'air libre, antérieurement à la construction de l'appareil; et je puis affirmer n'avoir observé aucune différence capable d'altérer d'une façon appréciable les résultats de mes expériences. Dans l'appareil de Greenwich (*voir* p. 135 de ce Volume), le cylindre en verre est formé de trois pièces séparées que l'on peut aisément démonter et enlever, de telle sorte que le pendule peut, à un moment quelconque, être exposé à l'air libre; les observations se font donc alternativement dans l'air confiné et dans l'air libre. Je n'avais pas le même avantage avec mon appareil, formé d'un seul tube métallique.

Anomalies provenant du couteau de suspension.

Le capitaine Sabine a montré, dans la Relation de ses expériences, page 195 (voir *Bibliographie,* t. IV, p. B. 93), qu'un pen-

dule suspendu à un couteau donne des résultats très différents suivant la nature des plans sur lequel celui-ci repose. Mais aucun des observateurs qui se sont occupés d'expériences semblables ne paraît avoir reconnu ce fait que des différences beaucoup plus grandes que celles que Sabine a signalées peuvent se présenter lorsqu'on fait usage d'un même couteau reposant sur le même plan. Il est probable que si ce fait a échappé jusqu'ici à l'attention des expérimentateurs, cela tient à la manière particulière dont on conduit habituellement les expériences du pendule ; car, lorsqu'on examine le détail de la plupart des expériences, on voit qu'après que le pendule, en une station, a été placé sur ses fourchettes, on ne le dérange plus, et l'on ne fait que l'élever et l'abaisser, jusqu'au moment où il est définitivement démonté et emballé pour une autre station. De la sorte, les anomalies dont je veux parler sont évitées et, par conséquent, n'ont pu être reconnues. Mais il est de règle que des expériences de ce genre doivent être variées de toutes les façons possibles, si l'on veut se mettre en garde contre l'influence de causes d'erreur impossibles à prévoir.

Lorsque le capitaine Basil Hall revint de son voyage dans l'océan Pacifique, pendant lequel il avait fait osciller le pendule en diverses stations, on trouva que le nombre des oscillations de son pendule, en un jour solaire moyen, différait de 0,97, presque une seconde de temps, de celui de ses oscillations avant le départ. On attribua à bien des causes ce que l'on appelait un grave et bien singulier désaccord ([1]); car, à cette époque, je crois, les résultats donnés par le pendule invariable étaient considérés comme infaillibles. Il est vrai que nous avons quelques cas absolument opposés où les pendules, à leur retour, ont donné exactement le même nombre qu'avant le départ ; et quant aux deux pendules emportés par le capitaine Sabine, ils ont montré, pendant tout le voyage, un accord très remarquable, puisque la plus grande différence à la moyenne n'a jamais dépassé 0,32 à aucune station ([2]). Mais je regarde cet accord comme une heureuse fortune, et je n'en puis tirer aucun argument pour diminuer la valeur des autres observations. Dans le voyage de M. le capitaine de Frey-

([1]) *Philosophical Transactions for* 1823, p. 287.
([2]) *Account of experiments*, p. 189.

cinet, qui avait emporté trois pendules différents, nous trouvons entre eux des variations de la différence de leurs nombres d'oscillations qui vont à plusieurs secondes par jour. Ainsi, à l'île Guam, la différence des pendules n° 1 et n° 2 était de 1180,162 oscillations, tandis qu'à l'île Rawak cette différence n'était que de 1173,693; variation, 6,469 oscillations. A l'île de France, la différence des deux pendules n° 2 et n° 3 était de 1012,326 oscillations, tandis qu'à l'île Rawak cette différence n'était que de 1008,557; variation, 3,769 oscillations. Enfin, à l'île de France, la différence des pendules n° 1 et n° 3 était de 164,948 oscillations, et à l'île Guam, cette différence montait à 169,833; variation, 4,885 oscillations en un jour moyen [1]. De même, le capitaine Duperrey, qui avait emporté deux de ces trois pendules, les n°s 1 et 3, trouva leur différence aux îles Malouines égale à 169,931 oscillations, tandis qu'au retour à Paris cette différence n'était que de 168,235; variation, 1,696 [2]. Or, dans tous ces cas, il ne devrait y avoir, dans la différence de deux pendules, qu'une variation nulle ou insignifiante; il n'en existerait pas si l'on pouvait rendre les conditions de l'expérience toujours identiques à elles-mêmes. Mais on ne peut s'étonner des différences que présentent les expériences de ces habiles officiers, lorsqu'on réfléchit aux difficultés de toute sorte contre lesquelles ils avaient à lutter. En fait, parmi la multitude d'expériences que j'ai exécutées moi-même, j'en ai trouvé bien peu où un pendule, après avoir été démonté, puis remis en place, le même jour, dans les conditions les plus favorables de constance de la température, avec tous les soins imaginables pour ne rien altérer, ait donné le même résultat qu'auparavant. Un même pendule, muni de deux couteaux différents et amené au synchronisme ou à très peu près sur ces deux couteaux, tel que les pendules réversibles que j'ai décrits dans l'énumération de mes instruments; pour lequel la différence insignifiante des résultats donnés par chaque paire de couteaux devrait, après réductions convenables, être une quantité constante; un tel pendule montre souvent des différences dont la grandeur est

[1] *Voyage autour du monde*, par M. de Freycinet, Observations du pendule, p. 22.

[2] *Connaissance des Temps pour* 1826, pages 294 et 300.

bien au-dessus de ce qu'on peut attribuer aux erreurs d'observation.

Ma conviction est que le pendule à couteau reposant sur des plans d'agate, tel qu'on le construit aujourd'hui, est, en fait, un instrument très mal approprié aux délicates recherches auxquelles il a été originairement destiné. Il est indispensable d'examiner sérieusement cette partie du pendule et d'en revoir l'ajustement, si l'on veut pouvoir accorder confiance aux résultats qu'il donne, soit pour la détermination de la longueur du pendule à secondes, soit simplement pour la comparaison de la pesanteur en différents points du globe. L'arête du couteau est rarement rectiligne, si elle l'est jamais ; les agates sont rarement parfaitement planes ; du moins, je n'en ai jamais trouvé de telles parmi toutes celles que j'ai examinées. La conséquence en est que, comme il y a toujours un petit jeu du couteau sur ses fourchettes, l'arête ne tombe pas toujours sur les mêmes parties des plans d'agate. C'est ce que l'on constate aisément en tenant une bougie allumée derrière le couteau quand il repose sur les agates : on reconnaît ainsi les moindres inégalités des points de contact. Mais le fait est encore rendu plus sensible en retournant le pendule sur les fourchettes ; ce retournement produit en général une variation très marquée dans les résultats. Parmi les nombreux pendules que je possède, je n'en ai rencontré qu'un seul qui donnât des résultats ne différant pas d'une quantité appréciable quand on le retourne sur ses fourchettes ou qu'on en tourne le couteau dans différents azimuts. Si l'arête et les plans d'agate étaient absolument corrects et constants, il ne devrait y avoir aucune différence dans les résultats, quel que fût le côté du pendule placé en face de l'observateur. Comment donc rendre raison de la différence de plus de deux oscillations par jour qui se présente avec l'un des pendules précédemment cités ! Le Tableau suivant va mettre mieux encore ce point en lumière et montrer les différences effectives que j'ai trouvées, simplement en retournant le pendule face pour face. Les numéros de la première colonne sont ceux que j'ai attribués aux pendules dans l'énumération que j'en ai faite au commencement de ce Mémoire. La barre de laiton, de $\frac{3}{8}$ de pouce d'épaisseur, a été mise en oscillation sur deux plans d'agate différents : les résultats sont en complet désaccord l'un avec l'autre :

Différence des résultats obtenus en retournant le pendule face pour face.

Nos.	Pendules.		Différence.
1 à 21.	Couteau français		0,249
22.	Pendule invariable de Kater n° 11		0,914
25.	Barre de laiton de $\frac{3}{8}$ de po. d'épaisseur.	couteau A...	0,135
26.		couteau B...	0,939
25.	Même barre sur d'autres plans	couteau A...	0,725
26.		couteau B...	1,078
27.	Barre de cuivre de $\frac{1}{2}$ pouce d'épaisseur.	couteau A...	0,296
28.		couteau B...	0,171
29.	Barre de fer de $\frac{1}{2}$ pouce d'épaisseur	couteau A...	0,121
30.		couteau B...	2,038
31.	Barre de laiton de $\frac{3}{4}$ pouce d'épaisseur..	couteau A...	0,707
32.		couteau B...	0,044
33.		couteau C...	0,473
34.		couteau D...	0,614

Comme le but exprès de ces expériences était de mettre en évidence la variation provenant de la position du couteau sur les plans d'agate, on les faisait se succéder immédiatement l'une à l'autre pour chaque pendule, en retournant celui-ci face pour face après chaque observation. Il est inutile d'allonger ce Mémoire en exposant par le menu toutes les expériences qui ont été faites à cette occasion; mais, en raison de la grandeur du désaccord que présente la dixième ligne du Tableau (barre de fer n° 30, couteau B), je crois qu'on m'excusera de donner ici le détail des observations relatives à ce pendule : ce qui permettra d'en vérifier à loisir le résultat général. C'est la grandeur même du désaccord qui m'a mis ici, comme dans le cas cité à la page 259, sur la voie de la découverte du fait que je signale, découverte purement accidentelle par conséquent. Mais cette anomalie m'a conduit à soupçonner qu'il pourrait bien s'en produire de semblables avec d'autres pendules, et les expériences répétées auxquelles je me suis alors livré ont confirmé cette prévision. De là résulte une nouvelle preuve de la nécessité de varier ces expériences de toutes les manières possibles, si l'on veut se mettre en garde contre l'influence de causes d'erreur souvent imprévues.

Résultats obtenus en retournant face pour face le pendule de fer n° 30.

Expériences.	Couteau B.	Couteau *b*.	Expériences.
205	86220,190	86220,999	206
207	20,346	23,499	208
209	20,433	21,818	210
213	21,002	21,976	211
215	20,524	23,309	212
216	20,129	22,967	214
218	20,574	21,791	217
219	20,302	22,338	222
220	20,247	22,450	223
221	20,473	22,401	224
227	20,504	22,881	225
228	20,362	23,077	226
229	20,962	23,033	230
Moyenne.....	86220,465	86222,503	

Il faut dire ici que les couteaux de tous les pendules que je possède sont marqués, sur leurs deux faces extrêmes, des lettres majuscules A ou B sur l'un des bouts, des petites lettres *a* ou *b* sur l'autre; par conséquent, la colonne désignée, dans le Tableau précédent, par la lettre B donne les résultats obtenus lorsque l'extrémité marquée B fait face à l'observateur; l'autre colonne donne ceux qui se rapportent au pendule retourné d'un demi-tour, l'extrémité *b* du couteau faisant maintenant face à l'observateur. On trouve pour moyenne des différences 2,038 oscillations par jour moyen, comme je l'ai déjà dit. Si l'on compare les divers résultats, on trouve les différences partielles quelque peu plus fortes que cela ne doit être en général dans une série régulière d'expériences. Ces différences proviennent de ce qu'on a, à dessein, fait varier la position du couteau sur les plans d'agate, afin de découvrir la cause du principal désaccord; et je ne puis les attribuer à d'autre cause qu'aux inégalités de l'arête, ou à celles des plans, ou à toutes les deux à la fois. Cependant, ces inégalités ne sont pas immédiatement perceptibles à l'œil.

De l'ensemble des résultats, il ressort clairement néanmoins que les différentes observations, fussent-elles faites avec le même pendule, ne sont pas rigoureusement comparables les unes aux autres,

à moins qu'on ne puisse certifier la perfection absolue des arêtes et des plans, ou qu'on ne trouve un moyen de faire osciller toujours le pendule sur les mêmes parties de l'arête et sur les mêmes portions des plans ou, en d'autres termes, de faire que l'arête et les plans se touchent, dans tous les cas, par les mêmes points de contact. Je crois que cette condition serait assez facile à remplir, et il faudrait y faire attention dans les expériences ultérieures. Quant aux observations déjà faites, on ne peut qu'en tirer le meilleur parti possible ([1]).

Correction relative a l'amplitude de l'arc.

Dans un des derniers Volumes des Transactions de la Société royale ([2]), le capitaine Sabine a montré que la formule usuelle de réduction du pendule à l'arc infiniment petit était erronée ; elle ne s'accorde pas, en effet, avec les résultats de ses observations, qui exigent que la correction, adoptée jusqu'à présent, soit, dans le cas du pendule réversible qu'il a employé, multipliée par 1,12 quand le poids le plus lourd est au-dessous de l'axe de suspension, et par 1,40 quand ce poids est au-dessus. Comme cette manière de voir était quelque peu en désaccord avec ce qui m'avait paru résulter de mes propres expériences, je me déterminai à faire quelques essais dans le but d'étudier minutieusement la différence qui provient de l'emploi des grands arcs et des petits. J'ai employé à cette étude la barre de laiton formant le pendule réversible n° 25. On fit, dans l'appareil à observer dans le vide et sous une pression d'environ un pouce, deux séries sur le couteau A et deux sur le couteau B ; chacune de ces séries fut divisée en trois parties, la première comprenant les amplitudes de 1° à peu près à 0°,60 environ, la deuxième de 0°,60 à 0°,38, et la dernière de 0°,38 à 0°,20 et 0°,10. La première série sur le couteau A fit voir que la correction ordinaire devait être accrue d'environ $\frac{1}{10}$,

([1]) Depuis que ces lignes ont été écrites, j'ai fait donner à mes plans d'agate une forme légèrement *arrondie*, de façon qu'on aperçoit un très mince filet de lumière sous l'arête du couteau, de part et d'autre de la ligne très courte par laquelle elle touche la surface courbe. Par ce moyen, j'ai complètement éliminé le désaccord pour le pendule n° 25-26, le seul que j'aie encore expérimenté de cette façon.

([2]) *Philosophical Transactions for* 1831, p. 461 et suiv.; 1830.

ce qui concorde de très près avec la détermination du capitaine Sabine. Mais la deuxième série sur le même couteau indiquait, au contraire, qu'elle devait être diminuée à peu près de la même quantité. Je considère donc ces deux séries comme se neutralisant l'une l'autre, les différences observées étant au-dessous des limites des erreurs expérimentales. Quant au couteau B, les deux séries ont montré que la correction doit être augmentée d'un cinquième, ce qui ne fait que la moitié de l'augmentation indiquée par les expériences du capitaine Sabine. Il faudrait donc de nouvelles recherches pour éclaircir ce point litigieux; elles devraient porter à la fois sur la cause de l'anomalie observée, qui peut être un glissement du couteau sur les plans d'agate, auquel cas elle varierait d'un pendule à l'autre et s'annulerait pour le mode de suspension de Bessel; et aussi sur l'exactitude des hypothèses d'après lesquelles est calculée la formule ordinaire de correction. Quand l'arc est très grand, la formule ne donne pas un résultat exact; c'est ce qui a été signalé par plusieurs auteurs. Mais la différence vient-elle d'un défaut de la formule, ou d'un glissement du couteau, ou de l'influence de l'air sur le pendule qui varierait d'un moment à l'autre, ou enfin de ces trois causes réunies? c'est ce qu'il reste à démontrer. Si l'on devait faire des expériences dans ce but, il me semble qu'il serait bon de n'y pas employer un appareil à observer dans le vide, et de faire osciller à l'air libre une boule très pesante, ou un cylindre, ou une lentille suspendue à un fil. On emploierait d'abord un couteau de suspension, puis le cylindre d'acier de Bessel, en ayant bien soin, dans ce dernier cas, que le fil soit *aplati* dans la portion où il touche le cylindre. Un pareil pendule oscille pendant un temps bien assez long pour permettre les observations nécessaires. C'était pour obtenir cette longue durée des oscillations que j'avais adopté l'emploi de l'appareil à observer dans le vide; mais il en résulte des difficultés d'un autre genre : il est difficile d'empêcher les fuites, et l'air qui rentre ainsi a un effet sensible sur l'amplitude des oscillations; d'autre part, le pendule, dans les grands arcs, s'approche trop des parois du tube, ce qui peut influencer les résultats.

Mais, quelle que soit la cause de la discordance que je signale, il est clair que, dans l'état actuel de nos connaissances, il ne nous est pas permis de comparer les résultats d'expériences qui ont été

faites avec des amplitudes très inégales. L'arc initial ne devrait, dans aucun cas, dépasser 1°. Dans mes propres expériences, j'ai généralement commencé avec un arc d'environ 0°,9 ou 0°,8; mais je pense que cette valeur initiale est encore trop grande, et, si j'avais à recommencer les expériences si délicates du pendule, je ne la prendrais pas de plus d'un demi-degré. Dans les observations du pendule invariable faites par les Anglais, l'arc initial a été d'environ 1°,2 ou 1°,3; mais MM. de Freycinet et Duperrey l'ont fait quelquefois de plus de 3°,5, et M. Rümker, dans ses expériences sur la longueur du pendule à secondes, a commencé une fois avec un arc de 11° ([1]).

Sur la détermination récente de la longueur du pendule a secondes a Greenwich, par le capitaine Sabine.

Dans le Volume des *Philosophical Transactions* que j'ai cité plus haut ([2]), le capitaine Sabine a aussi donné ce qu'il considère comme la vraie longueur du pendule à secondes à Greenwich, 39,13734 pouces ($994^{mm},0704$), d'après les observations qu'il a faites à l'Observatoire. Je n'ai pas l'intention de faire aucune remarque sur ces observations, qui semblent avoir été faites avec toute la recherche possible d'exactitude. Mais il me sera permis, je pense, traitant un sujet de même nature que le sien, de dire que je n'approuve pas le mode de réduction par lequel il en a déduit le résultat en question. Dans tous les cas où l'on emploie le pendule réversible, il est indispensable que l'isochronisme des oscillations sur les deux couteaux ou, ce qui revient au même, la différence des nombres d'oscillations sur les deux couteaux soit établie par des observations *de même poids* faites sur chacun des deux couteaux. C'est une règle absolue, et, si elle n'est pas observée, le problème ne peut être regardé comme rigoureusement résolu. Chaque couteau est indépendant de l'autre, chacun d'eux doit avoir un poids égal dans la détermination du résultat. Il est bien vrai que le couteau A, c'est-à-dire le pendule dans la position où le poids le plus lourd est au-dessous de l'axe de suspension, doit toujours donner, s'il y a quelque différence, une valeur plus

---

([1]) *Memoirs of the R. astronomical Society*, t. III, p. 289; 1827.
([2]) *Phil. Trans.* 1831, p. 459; 1830.

voisine de la valeur vraie que celle que donne le couteau B. Mais la correction exacte qu'il faut leur appliquer pour les rendre synchrones ne peut se déterminer qu'en donnant à B un poids égal dans les expériences. Or le synchronisme parfait est, à mon sens, impossible à obtenir ou, en tout cas, il ne vaut pas la peine qu'on se donnerait pour l'établir : en effet, la petite différence qui reste nous permet toujours d'appliquer la correction convenable, en la calculant d'après les principes connus de la théorie du pendule, et ces principes nous sont, dans ce cas, un guide bien plus sûr qu'aucune détermination de cette correction par l'expérience directe, puisque, dans ces recherches si délicates, il n'est que trop certain que les erreurs d'observations déjouent tous les calculs.

Le capitaine Sabine a néanmoins préféré s'en rapporter à l'expérience directe pour déterminer cette petite correction, et, considérant que le résultat donné par le couteau A est le plus voisin de la vérité, c'est sur lui qu'il a fait reposer la détermination du résultat final, sans l'appuyer sur la vérification nécessaire que lui aurait donnée un nombre égal d'essais faits sur l'autre couteau, qui sont pourtant tout aussi indispensables pour la précision de l'ensemble. Ainsi, il a fait osciller le pendule 188 heures sur le couteau A, et 54 heures seulement sur le couteau B. Des observations plus prolongées sur ce dernier couteau auraient eu, très probablement, l'avantage de corriger certaines anomalies qui frappent l'œil à l'examen des observations. On voit, par exemple, que, lorsque le curseur était déplacé de 0,133 pouce ($3^{mm},38$), il en résultait un *accroissement* de 0,10 oscillation par jour sur le couteau A et une *diminution* de 1,12 oscillation sur le couteau B. Or ce résultat est contraire à la théorie connue du pendule, d'après laquelle l'effet d'un semblable curseur est de produire une altération de même espèce, quoique inégale, sur chacun des couteaux ; le rapport des deux effets est déterminé par celui des distances du centre de gravité à chacun des couteaux (¹). Dans l'état actuel du pendule en question, tel qu'il a été employé par le capitaine Sabine dans ses

(¹) Il aurait suffi, pour démontrer l'exactitude de ce théorème et déterminer la valeur absolue de l'effet produit, que le capitaine Sabine eût fait subir au curseur un déplacement plus considérable, 1 ou 2 pouces par exemple, de façon à produire un effet bien net sur le nombre des oscillations, et assez grand pour contre-balancer les erreurs inévitables d'observation.

dernières expériences, c'est-à-dire après l'enlèvement des queues en bois, j'ai trouvé, par une mesure directe, 26,23 pouces pour la distance du centre de gravité au couteau A, et 13,21 pouces pour la distance au couteau B. Nous avons donc $\frac{26,23}{13,21}$ ou 1,985 pour le facteur par lequel il faut multiplier le changement des résultats obtenus avec le couteau A, pour avoir l'effet correspondant sur le couteau B ; les effets sont tous deux positifs ou tous deux négatifs. Et, si l'expérience donne un résultat différent, nous sommes en droit de soupçonner l'existence de quelque erreur dans les observations. On déduit aussi de là, pour valeur du coefficient par lequel il faut multiplier la différence des nombres d'oscillations sur A et sur B pour avoir le nombre de vibrations que ferait le pendule s'il était rendu absolument synchrone, le nombre $\frac{13.21}{26,23 - 13,21}$ ou 1,015. C'est cette quantité qu'il faut employer pour déterminer la longueur du pendule à secondes. Tout ceci suppose d'ailleurs que les deux couteaux sont déjà ajustés de manière à donner un synchronisme presque exact. En appliquant ces principes aux expériences du capitaine Sabine, on obtient les valeurs suivantes du nombre N d'oscillations que ferait le pendule s'il était rendu parfaitement synchrone :

Curseur.	A.	B.	A — B.	N.
1,500	86069,00	86070,26	— 1,26	86067,72
1,566	69,04	69,61	— 0,57	68,46
1,633	69,10	69,14	— 0,04	69,06

Il y a, entre ces trois valeurs de N, une différence de 6 et 7 dixièmes d'oscillation ; si l'on devait en choisir une de préférence aux autres, ce serait la deuxième qui est le résultat du plus grand nombre d'observations. Mais il manque à toutes la confirmation qu'auraient donnée les observations faites sur le couteau B.

Méthode d'observation et de réduction des observations.

Avant de clore ce Mémoire, il me paraît utile de dire quelques mots de la méthode que j'ai suivie dans mes expériences, et des données que j'ai employées dans les réductions, de manière à mettre en pleine lumière les conditions dans lesquelles j'ai opéré

et à permettre à chacun de vérifier, s'il lui plaît, les détails de mes calculs.

L'horloge employée pour l'observation des coïncidences est une excellente pendule de Molyneux, à balancier à mercure; celui-ci porte une longue queue en bois sur laquelle glissent deux segments circulaires de papier doré, réfléchissant une lumière brillante. La distance de ces deux segments est variable à volonté, ce qui permet de les adapter à la longueur du pendule en expérience. La marche de l'horloge est déterminée par une comparaison quotidienne avec une autre horloge, de Hardy, réglée sur le temps sidéral, dont la marche est déterminée à l'aide d'un instrument des passages de 30 pouces (762^{mm}). Ces deux horloges vont très bien et, relativement aux expériences relatées dans ce Mémoire et qui sont purement comparatives, ne peuvent introduire aucune erreur appréciable. Celle dont j'ai fait usage dans les expériences, que j'appellerai, pour la distinguer, l'*horloge du pendule*, a été, dans tous les cas, réglée sur le temps moyen, excepté quand elle était associée à la longue tige cylindrique n° 21 et au long tube de laiton n°s 35 à 38. Il a fallu alors altérer la longueur du balancier pour obtenir un intervalle convenable des coïncidences. La marche diurne de cette horloge a toujours été maintenue très faible, pour des motifs évidents; elle n'a jamais dépassé $0^s,80$ par jour [1].

Soit t l'intervalle total de temps, exprimé en secondes, employé à une série d'expériences, tel que le donne l'horloge qui fait $86400 + r$ oscillations en un jour moyen : r est la marche diurne de l'horloge et sera affecté du signe — si l'horloge retarde. Soit n le nombre des coïncidences, y compris la première, qui se sont produites dans cet intervalle. Je désignerai par m l'intervalle moyen des coïncidences $\frac{t}{n-1}$, exprimé en secondes de l'horloge; le nombre N d'oscillations faites par le pendule d'expérience en

---

(1) On remarquera parfois un changement brusque de marche entre deux séries successives d'observations; mais cela n'a lieu que lorsqu'on a changé le pendule en expérience et qu'il a fallu arrêter l'horloge pour déplacer le disque brillant. Dans les quelques cas où la variation de la marche diurne a été une quantité appréciable, j'ai réparti cette variation, proportionnellement au temps, sur les expériences de la journée.

un jour solaire moyen sera

$$N = \frac{m \pm 2}{m}(86400 + r) = \frac{m \pm 2}{m} 86400 + r\left(1 \pm \frac{2}{m}\right);$$

on prendra le signe + si le pendule d'expérience va plus vite que l'horloge, le signe — dans le cas contraire. Tous les pendules compris dans l'énumération que j'en ai donnée, du n° 1 au n° 20 inclusivement, allaient plus vite que l'horloge ; il faut donc employer le signe supérieur dans les calculs. Tous les pendules formés de barres métalliques, du n° 25 au n° 34, et les pendules n°s 40 et 41 allaient moins vite que l'horloge; il faut donc, pour eux, adopter le signe inférieur. Dans toutes mes réductions, j'ai pris d'abord N égal à $\frac{m+2}{m}$ 86400, et j'ai appliqué ensuite le terme $r\left(1 \pm \frac{2}{m}\right)$ comme correction séparée de la marche de l'horloge. Pour la longue tige cylindrique n° 21, il a fallu faire un calcul spécial ; et, dans le cas du tube cylindrique n°s 35 à 38, on a ajusté le balancier de l'horloge pour faire 90000 oscillations en un jour moyen ; on a appliqué ensuite la correction résultant de la variation de l'horloge par rapport à cette marche normale.

Pour noter les coïncidences, j'ai adopté la méthode proposée par les professeurs Whewell et Airy : j'observe donc la première et la dernière disparition du disque brillant, puis la première et la dernière réapparition ; la moyenne des quatre moments est celui de la coïncidence ([1]). C'est évidemment le mode d'observation le plus correct; il est bien préférable à l'observation d'une seule disparition et d'une seule réapparition et, à plus forte raison, à l'observation d'une disparition seulement ou d'une réapparition. Il a encore cet avantage, qu'il évite la nécessité d'obtenir un ajustement très précis du diaphragme, et l'œil n'est pas obligé de se porter incessamment d'un côté du pendule à l'autre, dans l'incertitude où est l'observateur du côté où va se produire la disparition ou la réapparition. Je regarde cette partie de l'observation comme parfaite, et il ne me semble pas qu'il puisse s'introduire

([1]) Les expériences sur la longue tige cylindrique n° 21 font exception à cette règle; car, dans ce cas, on ne pouvait apercevoir, à travers les fenêtres du tube, qu'un seul des côtés de la tige.

la moindre erreur si l'on adopte cette manière d'observer les coïncidences ([1]). Dans le Tableau intitulé : *Détails des expériences*, les deux moments de disparition sont inscrits l'un au-dessous de l'autre et séparés par une barre de fraction ; il en est de même pour les réapparitions ; la moyenne des quatre moments occupe la colonne suivante. On a beaucoup écrit sur l'inutilité d'observer plus d'un seul de ces phénomènes, et j'ai été, je l'avoue, quelque peu étonné de tout ce qu'on a dit sur ce sujet ([2]). Il est peut-être possible que si la même personne faisait toujours les observations, toujours dans les mêmes conditions, avec toujours la même grandeur du disque, et toujours la même amplitude, qui ne soit pas très petite, avec une quantité de lumière toujours la même, il est peut-être possible alors que les résultats n'offrent pas de grandes divergences. Mais une pareille uniformité ne se rencontre jamais dans la pratique ; la nature même du sujet fait perpétuellement varier les conditions de l'observation. Il est donc essentiel d'adopter une méthode générale et sûre pour déterminer l'instant de la coïncidence ; si je ne m'étais astreint à le faire, j'aurais, dans beaucoup de cas, été conduit à des erreurs considérables.

L'amplitude de l'oscillation a toujours été observée à l'aide d'une échelle diagonale fixée à la boîte de l'horloge ; on peut lire aisément les divisions au centième de degré. Cette échelle est distante du pendule de 7 pouces ($177^{mm},8$) ; il en résulte que, dans chaque cas, la lecture directe doit recevoir une correction, qui se déduit du rapport des distances de la lunette au pendule et à l'échelle divisée. Le Tableau des expériences donne les valeurs ainsi corrigées.

Tous les pendules ont été ramenés à une même température normale que j'ai prise de 62° F. N'ayant pas les moyens de déter-

([1]) Les professeurs Whewell et Airy m'ont de plus suggéré l'idée d'enlever le diaphragme de l'intérieur de la lunette et de le placer entre le pendule d'expérience et le balancier de l'horloge. Je l'ai fixé à la boîte de cette horloge, mais de manière à pouvoir le déplacer dans tous les sens pour le bien ajuster, et, de plus, on pouvait ou l'élargir ou le contracter suivant les différents pendules employés.

([2]) Voir *Philosophical Transactions for* 1826, Part I, p. 4, etc., et Part II, p. 2, etc., Expériences du lieutenant Foster sur le pendule. *Voir* aussi l'opinion contraire du capitaine Sabine dans *An Account of Experiments*, in-4° ; London, 1825, p. 217-233.

miner la dilatation des différents métaux, j'ai adopté les valeurs qui m'ont paru les plus dignes de confiance. Il ne peut d'ailleurs résulter de ce choix aucune erreur appréciable, car il n'y a jamais eu de changement considérable de température dans l'intervalle d'une expérience à la suivante. Dans les cas où le pendule était suspendu par un fil de fer ou d'argent, j'ai tenu compte de la dilatation de la petite pièce de laiton, d'environ $1\frac{1}{2}$ pouce, qui forme la queue du couteau, et de celle du rayon de la sphère. J'ai adopté les valeurs suivantes des dilatations pour 1° du thermomètre de Fahrenheit.

Fil de fer..............	0,000006666
Barre de fer.............	0,000006850
Barre de cuivre..........	0,000009444
Barre de laiton..........	0,000010000
Fil d'argent.............	0,000010600

En appelant e ce coefficient, la formule de correction du nombre des vibrations pour une variation de température de 62° à t°, sera

$$N \times \tfrac{1}{2} e (t^{\circ} - 62^{\circ}),$$

t° étant la hauteur moyenne du thermomètre pendant l'intervalle des coïncidences. Le pendule à mercure n° 39 et les pendules à tige de bois n°s 40 et 41, étant des pendules compensés, n'appellent aucune correction de température.

J'ai employé à la détermination des températures deux excellents thermomètres étalons, construits sous le contrôle immédiat de M. Troughton. Ils sont placés à l'intérieur de l'appareil à observer dans le vide ([1]), l'un au niveau de l'axe de suspension, et l'autre au niveau du centre d'oscillation du pendule. On lisait ce thermomètre inférieur à travers la glace qui ferme la fenêtre percée dans le cylindre. Lorsque le vide était fait dans l'appareil, j'ai toujours, dans le calcul des corrections de température, aug-

([1]) Dans les premières expériences, avant que j'eusse trouvé le moyen de suspendre le thermomètre inférieur au dedans du cylindre, je le plaçais à l'extérieur, dans la même position par rapport au centre d'oscillation. Mais c'est le thermomètre intérieur qui, dans tous les cas semblables, a servi aux réductions, en ajoutant 0°,05 à son indication moyenne. Le thermomètre extérieur marquait, en effet, 0°,10 de plus que l'intérieur.

menté de 0°,75 l'indication moyenne des thermomètres, pour compenser l'effet produit sur les réservoirs de ces instruments par la soustraction de la pression atmosphérique, suivant la remarque qui en a été faite par le capitaine Sabine dans les *Philosophical Transactions* de 1829, p. 214 (*voir* la traduction de ce Mémoire, p. 144). Dans le Tableau détaillé des expériences, les lectures des thermomètres sont données sans cette correction. Les hauteurs barométriques sont toujours corrigées de la capillarité ; mais le baromètre à siphon, employé pour mesurer la force élastique de l'air restant lorsqu'on a fait le vide, ne nécessite pas cette correction.

L'*Appendice* joint à ce Mémoire comprend deux Tableaux : dans le premier, on donne les détails de toutes les particularités, tirées du journal d'observations, qui sont nécessaires pour le calcul des corrections ; dans le second, on donne les valeurs de ces corrections sous leurs titres respectifs. On trouve dans le premier Tableau : les époques de la première et de la dernière coïncidence ; l'amplitude de l'oscillation et la hauteur du baromètre à ces deux époques ; la plus haute et la plus faible lecture des deux thermomètres ; la marche diurne de l'horloge pendant l'intervalle de chaque expérience. Le numéro et la date des expériences sont toujours indiqués d'abord. Le second Tableau contient : 1° le numéro correspondant de l'expérience dans le Tableau I ; 2° la durée totale de l'expérience ; 3° le nombre, diminué d'une unité, des coïncidences observées ; 4° l'intervalle moyen exprimé en secondes de l'horloge du pendule ; 5° la valeur des corrections d'amplitude, de température et de marche diurne de l'horloge ; et 6° enfin le nombre d'oscillations, N′ ou N″ (suivant que l'expérience a eu lieu dans l'air ou dans le vide), en un jour solaire moyen ; ce nombre n'est pas corrigé de l'effet de la présence de l'air, dont la recherche est justement l'objet de ce travail. Cependant, dans la dernière partie de ce Tableau, de l'expérience 205 à l'expérience 230 inclusivement, j'ai introduit la correction due à la pression de l'air, et la dernière colonne contient le nombre vrai des oscillations en un jour moyen, corrigé de l'effet dû à l'atmosphère : ces expériences, en effet, ont un tout autre but que les autres, et je les ai insérées pour montrer l'effet que produit le simple retournement du pendule face pour face, dont j'ai parlé à la page 265.

APPENDICE [1].

Premier Tableau. — *Détail des expériences.*

Pendule.	N^{os}.	1832.	Disparition.	Réapparition.	Coïncidence.	Arc.	Thermomètre. supér.	Thermomètre. infér.	Baromètre.	Marche.
			h m s	s	s	°	°	°		s
N° 1. Sphère de platine.	1	Fév. 21	20.51.$\frac{53}{56}$	$\frac{59}{62}$	57,5	0,77	38,4	38,4	30,256	−0,16
			1. 5.$\frac{5}{8}$	$\frac{11}{16}$	10,0	29	39,0	39,1	30,228	
	2	» 21	2. 6.$\frac{53}{54}$	$\frac{59}{60}$	56,5	77	38,6	39,1	0,860	−0,18
			11.50.$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{12}$	6,0	35	39,5	39,5	1,080	
	3	» 21	11.51.$\frac{41}{42}$	$\frac{47}{48}$	44,5	83	39,7	39,5	1,080	−0,20
			22.16.$\frac{7}{8}$	$\frac{20}{21}$	14,0	34	38,8	38,5	1,250	
	4	» 22	23. 1.$\frac{35}{36}$	$\frac{43}{44}$	39,5	82	39,8	39,7	30,374	−0,25
			4.30.$\frac{32}{35}$	$\frac{56}{58}$	45,2	22	39,2	39,0	30,364	
	5	» 23	20. 9.$\frac{29}{32}$	$\frac{37}{40}$	34,5	81	38,6	38,5	30,396	−0,30
			1.13.$\frac{17}{18}$	$\frac{33}{34}$	25,5	24	38,5	38,4	30,344	
	6	» 23	2.44.$\frac{23}{24}$	$\frac{29}{32}$	27,0	82	38,6	38,6	1,020	−0,35
			11.45.$\frac{37}{40}$	$\frac{45}{48}$	42,5	39	37,9	37,5	1,200	
	7	» 22	11.46.$\frac{57}{60}$	$\frac{63}{66}$	61,5	82	38,0	37,6	1,210	−0,40
			21.37.$\frac{49}{50}$	$\frac{59}{60}$	54,5	34	37,0	37,0	1,360	
	8	» 24	22.22.$\frac{25}{28}$	$\frac{33}{36}$	30,5	81	38,0	38,0	30,154	−0,45
			2. 1.$\frac{49}{50}$	$\frac{59}{60}$	54,5	36	37,6	37,5	30,074	

Deuxième Tableau. — *Résultats déduits du premier Tableau.*

Pendule.	N^{os}.	Durée totale.	Nombre de coïncidences.	Intervalle moyen.	Corrections d'amplitude.	Corrections de température.	Corrections de marche.	N' et N''.
		h m s		j				
N° 1. Sphère de platine.	1	4.13.12,5	30	506,417	+0,429	−6,914	−0,160	86734,576
	2	9.43. 9,5	70	499,850	0,493	6,558	0,180	86739,469
	3	10.24.29,5	75	499,593	0,530	6,572	0,200	86739,640
	4	5.29. 5,7	39	506,301	0,392	6,706	0,250	86734,735
	5	5. 3.51,0	36	506,417	0,407	6,980	0,300	86734,348
	6	9. 1.15,5	65	499,623	0,578	6,861	0,350	86739,228
	7	9.50.53,0	71	499,338	0,523	7,083	0,400	86739,099
	8	3.39.24,0	26	506,308	0,536	7,196	0,450	86734,184

[1] Je ne donne ici qu'un spécimen du Journal d'expériences de Baily; les détails que contiennent ces Tableaux ne peuvent intéresser que les personnes qui voudraient reprendre les calculs de l'auteur. (C. W.)

DE L'EFFET

DU

FROTTEMENT INTÉRIEUR DES FLUIDES

SUR LE

MOUVEMENT DES PENDULES;

PAR G.-G. STOKES,

Fellow de Pembroke College.
Professeur Lucasian de Mathématiques à l'Université de Cambridge.

Mémoire lu à la *Philosophical Society* de Cambridge le 9 décembre 1850, et publié dans les *Transactions* de cette Société, Vol. IX, 2e Partie.

La grande importance des résultats obtenus au moyen du pendule a conduit les savants à donner à ce sujet d'étude une telle attention, et à apporter à chaque détail des expériences un tel scrupule d'exactitude, que les observations du pendule peuvent être à juste titre rangées parmi les plus exactes des temps modernes. Il est inutile d'énumérer ici les différentes méthodes qui ont été employées, et les diverses corrections qui doivent être faites, pour déduire, des observations effectuées, le résultat qui correspondrait au cas idéal d'un pendule simple faisant des oscillations infiniment petites dans le vide. Le présent Mémoire n'a trait qu'à une seule de ces corrections, celle que l'on appelle habituellement la *réduction au vide*. En raison des difficultés et des dépenses qu'entraînerait l'emploi d'un appareil propre à l'observation dans le vide, on fait généralement les observations

dans l'air, et il devient alors nécessaire d'appliquer une petite correction, pour ramener le résultat observé à ce qu'il aurait été si le pendule avait oscillé dans le vide. L'effet le plus évident de l'air consiste en une diminution de la force motrice et, par suite, en un accroissement de la durée de l'oscillation, en raison de la perte de poids dans ce fluide. La correction due à cette perte de poids se calcule aisément d'après les premiers principes de l'Hydrostatique, et elle a été pendant longtemps la seule correction que l'on crût nécessaire pour la réduction au vide. Mais, en 1828, Bessel, dans un très important Mémoire dans lequel il déterminait par une méthode nouvelle la longueur du pendule à secondes, fit ressortir de considérations théoriques la nécessité de tenir compte de l'inertie de l'air en même temps que de son poids. Le calcul numérique de l'effet de l'inertie forme un problème d'Hydrodynamique que Bessel n'attaqua point; il conclut des principes généraux qu'un fluide, ou tout au moins un fluide de faible densité, n'a d'autre effet sur la durée de l'oscillation très petite d'un pendule que celui qui résulte de la diminution du poids et de l'augmentation du moment d'inertie de ce pendule. Dans le cas d'un corps dont les dimensions sont petites, comparées à la longueur du fil de suspension, Bessel représentait l'accroissement d'inertie par celle d'une masse égale à k fois la masse du fluide déplacé, qui doit être supposée s'ajouter à l'inertie du corps lui-même. Quant au facteur k, il le détermina expérimentalement pour une sphère d'un peu plus de 2 pouces de diamètre, qu'il fit osciller dans l'air et dans l'eau. Le résultat pour l'air, déterminé ainsi d'une façon un peu indirecte, fut $k = 0,9459$, valeur que Bessel éleva plus tard à 0,956 dans un autre Mémoire. Une sphère de laiton, de la même dimension, que l'on fit osciller dans l'eau en la suspendant successivement à deux fils de différente longueur, donna deux valeurs de k un peu différentes l'une de l'autre et égales à peu près aux deux tiers seulement de la valeur obtenue dans l'air.

L'attention du monde savant ayant été appelée sur ce sujet par la publication du Mémoire de Bessel, de nouvelles recherches à la fois théoriques et expérimentales apparurent bientôt. En vue d'étudier l'influence de l'air par une méthode plus directe que celle de Bessel, le capitaine Sabine (aujourd'hui colonel) fit con-

struire aux frais du Bureau des Longitudes un grand appareil où l'on pouvait faire le vide, et il y détermina l'influence de l'air sur la durée d'oscillation d'un pendule invariable spécial. Les résultats des expériences sont contenus dans un Mémoire lu à la Société Royale, en mars 1829, et imprimé dans les *Philosophical Transactions* de cette année (¹). La moyenne de huit expériences très concordantes donna 1,655 pour valeur du facteur par lequel l'ancienne correction due à la perte de poids dans l'air doit être multipliée, pour donner la correction totale relative à ce pendule. Un fait très remarquable fut mis en évidence dans le cours de ces expériences ; tandis que l'influence de l'air à la pression atmosphérique et sous une pression à peu près moitié moindre se montrait, aussi exactement que possible, proportionnelle à la densité, l'influence de l'hydrogène à la pression atmosphérique se montra, comparée à celle de l'air, de beaucoup supérieure à celle qui répondrait à la densité de ce gaz. En fait, le rapport des effets produits par l'hydrogène et par l'air sur les durées d'oscillation était à peu près celui de 1 à 5 $\frac{4}{7}$, tandis que le rapport des densités était seulement de 1 à 13. Après avoir énoncé ce résultat, le colonel Sabine ajoute : « La différence de ce rapport à celui que donne l'expérience est trop grande pour qu'on puisse raisonnablement l'attribuer à une erreur accidentelle des expériences, surtout en présence de l'identité presque absolue des divers résultats. Ce fait n'est-il pas l'indication d'une propriété inhérente aux fluides élastiques, analogue à la viscosité des liquides, qui produirait une résistance au mouvement des corps qui les traversent, indépendamment de leur densité? Propriété possédée, dans ce cas, à des degrés différents par l'air et par l'hydrogène, puisqu'il ressort des expériences que le rapport de la résistance de l'hydrogène à celle de l'air est plus que double de celui qui résulterait de leurs densités. Si l'existence d'une telle propriété, variable d'un fluide élastique à un autre, venait à être confirmée par des expériences actuellement en cours d'exécution sur d'autres gaz, il serait difficile d'imaginer un appareil plus propre à en mesurer la valeur que celui que je viens de décrire ; et le pendule, outre ses nombreuses et importantes applications à la Physique générale, en

(¹) *Voir* p. 134 de ce Volume la traduction du Mémoire de Sabine.

trouverait une nouvelle pour cette détermination très délicate sans doute, mais pas plus délicate avec les soins convenables que bien d'autres du domaine de la Chimie. » Le colonel Sabine m'a fait savoir que les expériences auxquelles il faisait allusion avaient été interrompues par un motif qu'il n'est pas besoin d'énoncer, mais que les résultats partiels obtenus avaient confirmé celui qu'avait offert l'hydrogène, et mis en évidence l'existence d'une action spécifique des différents gaz tout à fait distincte de leur variation de densité.

Nos connaissances au sujet de l'influence de l'air sur la durée d'oscillation des pendules se sont considérablement accrues par les travaux de feu M. Baily, qui fit établir dans sa propre maison un appareil à observer dans le vide, avec lequel il exécuta plusieurs centaines d'expériences très soignées sur des pendules de formes très variées. Ces expériences sont décrites dans un Mémoire lu à la Société Royale le 31 mai 1832 [1]. Le résultat pour chaque pendule est exprimé par la valeur d'un facteur n, par lequel il faut multiplier l'ancienne correction due à la perte de poids dans l'air, pour obtenir l'effet total de l'air tel qu'il ressort de l'observation. Quatre sphères, d'un peu moins de $1\frac{1}{2}$ pouce de diamètre, donnèrent une valeur moyenne de n égale à 1,864 ; tandis que trois sphères, d'un peu plus de 2 pouces de diamètre, donnèrent seulement 1,748. Ces dernières avaient à fort peu près les dimensions de celles avec lesquelles Bessel, par une méthode différente, avait obtenu $k = 0,946$ ou 0,956, et qui correspond à $n = 1,946$ ou 1,956. Parmi les *expériences additionnelles* rapportées dans la dernière Partie du Mémoire de Baily, se trouve une série où les pendules consistaient en de simples tiges cylindriques. Avec de tels pendules, on trouva que n croissait régulièrement, quoique suivant une loi inconnue, à mesure que le diamètre de la tige diminuait ; tandis qu'un tube de laiton de $1\frac{1}{2}$ pouce de diamètre donnait n égal à 2,3 environ, une tige fine ou gros fil de 0,072 pouce de diamètre donnait pour n une valeur s'élevant à 7,530.

Les mathématiciens cependant ne restaient pas inactifs, et il parut à cette époque plusieurs Mémoires dont le but était de déterminer, d'après les lois de l'Hydrodynamique, l'effet produit par

---

(1) *Voir* p. 185 de ce Volume la traduction de ce Mémoire de Baily.

un fluide sur le mouvement d'un pendule. Le premier est dû à la plume du célèbre Poisson. Il fut lu à l'Académie de Paris, le 22 août 1831, et est imprimé dans le XIe Volume des Mémoires de cette Académie. Dans ce travail, Poisson considère le cas d'une sphère suspendue à un fil fin et oscillant dans l'air ou dans tout autre gaz. Il emploie les équations ordinaires du mouvement d'un fluide élastique, qu'il simplifie en y négligeant les termes dépendant du carré de la vitesse; mais à la fin, au moment d'appliquer la solution à la pratique, il néglige comme insensibles les termes par lesquels seuls l'action d'un fluide élastique diffère de celle d'un fluide incompressible, si bien que le résultat ainsi simplifié est également applicable aux fluides des deux espèces. Il trouve qu'en négligeant des quantités insensibles, n est égal à 1,5; de sorte que la masse qu'il faut supposer ajoutée à celle du pendule est égale à la moitié de celle du fluide déplacé. Ce résultat ne diffère pas beaucoup de ceux que Bessel a obtenus expérimentalement dans le cas de sphères oscillant dans l'eau, mais il s'écarte notablement de celui qu'il a obtenu dans l'air. Il s'accorde très exactement avec des expériences faites à peu près cinquante ans auparavant par Dubuat, qui, en fait, avait devancé Bessel, en montrant que la durée d'oscillation d'un pendule en mouvement dans un fluide devait être affectée par l'inertie du fluide aussi bien que par sa densité. Les travaux de Dubuat sur ce sujet avaient été entièrement laissés de côté par tous les savants qui s'étaient occupés d'expériences sur le pendule, probablement parce que personne d'entre eux n'avait eu l'idée de chercher dans un Traité d'Hydraulique des renseignements sur le pendule. Dubuat, en effet, avait plutôt appliqué le pendule à l'Hydrodynamique que l'Hydrodynamique au pendule.

Dans le *Philosophical Magazine* de septembre 1833, on trouve une courte Note du professeur Challis relative à la résistance de l'air au mouvement d'un pendule à boule. Après avoir rappelé un précédent Mémoire, dans lequel il avait fait voir que l'on ne commet aucune erreur dans un problème de cette nature en négligeant la compressibilité du fluide, lors même qu'il est élastique, le professeur Challis, adoptant une hypothèse particulière sur le mouvement, obtient le nombre 2 pour la valeur du facteur n dans le cas d'un tel pendule. Ce mode de solution, qui a été adopté dans

plusieurs Mémoires postérieurs, a donné lieu à une controverse entre le professeur Challis et l'astronome royal (G.-B. Airy), ce dernier soutenant l'exactitude du résultat de Poisson.

Dans un Mémoire lu à la Société royale d'Edimbourg, le 16 décembre 1833, et imprimé dans le XIIIe Volume des *Transactions* de cette Société, Green a déterminé, en partant des équations ordinaires du mouvement d'un fluide, la résistance à un ellipsoïde qui exécute de petites oscillations sans tourner sur lui-même. Le résultat est exprimé par une intégrale définie ; mais, lorsque deux des axes principaux de l'ellipsoïde deviennent égaux, l'intégrale admet une expression en termes finis, au moyen des fonctions circulaires ou logarithmiques. Si l'ellipsoïde devient une sphère, le résultat de Green se réduit à celui de Poisson.

Dans un Mémoire lu à l'Académie royale de Turin, le 18 janvier 1835, et imprimé dans le XXXVIIe Volume des Mémoires de cette Académie, M. Plana a développé longuement la théorie de la résistance des fluides au mouvement des pendules. Ce Mémoire, cependant, contient plutôt un examen détaillé de différents points relatifs à la théorie que la détermination de la résistance pour quelque nouvelle forme du pendule. L'auteur traite d'abord le cas d'un fluide incompressible, et fait voir ensuite que le résultat serait sensiblement le même dans le cas d'un fluide élastique. Dans le cas d'un pendule à boule, le seul pour lequel M. Plana effectue la solution complète du problème, son résultat concorde avec celui de Poisson.

Dans un travail lu antérieurement devant la Société philosophique de Cambridge, le 29 mai 1843, et imprimé dans le VIIIe Volume de ses *Transactions*, p. 105, j'ai déterminé la résistance au mouvement d'un pendule à boule oscillant dans l'intérieur d'une enveloppe sphérique concentrique, et j'ai mis en évidence la source d'une erreur dans laquelle Poisson était tombé, en concluant qu'une pareille enveloppe ne pouvait avoir aucune influence. Lorsque le rayon de l'enveloppe devient infini, la solution concorde avec celle que Poisson a obtenue pour le cas d'une masse fluide illimitée. J'ai aussi cherché l'accroissement de résistance dû à la limitation du fluide par un plan rigide éloigné. Le même Mémoire contient également le calcul de la résistance au mouvement d'un long cylindre oscillant dans une masse de fluide, soit

illimitée, soit terminée par une enveloppe cylindrique ayant même axe que le cylindre dans la position d'équilibre de celui-ci. Dans le cas d'une masse de fluide indéfinie, j'ai trouvé que l'effet de l'inertie était le même que si une masse égale à celle du fluide déplacé était distribuée le long de l'axe du cylindre, de sorte que n est égal à 2 dans le cas d'un pendule consistant en une longue tige cylindrique. Ce résultat concorde à très peu près avec celui qu'a obtenu Baily pour le long tube de $1\frac{1}{2}$ pouce; mais, si nous le comparons avec les résultats relatifs à des tiges cylindriques, nous rencontrons la même divergence, entre la théorie et l'observation, que l'on a déjà remarquée dans le cas des sphères. La divergence est cependant beaucoup plus frappante dans le cas actuel, ainsi qu'on devait naturellement s'y attendre après ce qui avait été observé avec les sphères, en raison du diamètre beaucoup plus petit des solides employés.

Il y a quelques années, le professeur Thomson me faisait part d'une très belle et très puissante méthode qu'il avait appliquée à la théorie de l'électricité et qui s'appuie sur la considération de ce qu'il appelle les *images électriques*. Je trouvai que la même méthode, avec certaines modifications, s'appliquait à plusieurs problèmes intéressants concernant le pendule à boule. Elle me permit de calculer, soit la résistance qu'éprouve une sphère oscillant en présence d'une sphère fixe ou dans l'intérieur d'une enveloppe sphérique, soit celle qu'éprouve une couple de sphères en contact ou reliées par un fil mince, la direction de l'oscillation étant, dans tous les cas, celle de la ligne des centres des sphères. L'influence d'un plan rigide perpendiculaire à la direction du mouvement est comprise dans ce calcul comme cas particulier. La méthode s'applique également, comme me le fit voir le professeur Thomson, au solide bizarre limité par les segments extérieurs de deux sphères qui se coupent, pourvu que l'angle extérieur d'intersection soit un sous-multiple de deux angles droits. Toute une série de problèmes correspondants, où les sphères sont remplacées par de longs cylindres, peuvent se résoudre de la même manière. Ces résultats ont été annoncés à la réunion de l'Association britannique, à Oxford, en 1847, et sont mentionnés dans le volume des Rapports de cette année, mais n'ont pas encore été publiés en détail.

Les Mémoires que je viens de citer forment l'ensemble des travaux venus à ma connaissance, qui ont eu pour objet de calculer, d'après les lois de l'Hydrodynamique, la résistance éprouvée par un corps de forme donnée oscillant à la façon d'un pendule. Ils partent tous des équations ordinaires du mouvement des fluides. Aucun d'eux ne parvient à rendre compte d'un des caractères dominants des résultats expérimentaux, savoir l'accroissement du facteur n lorsque les dimensions du corps oscillant diminuent. Ils ne reconnaissent aucune distinction entre les actions des différents fluides, autre que celle qui résulte de leur différence de densité.

Dans une conversation que j'eus il y a sept ou huit ans avec le Dr Robinson sur ce sujet de l'application de la théorie au mouvement des pendules, il me fit remarquer la divergence qui existe entre les résultats de la théorie et ceux de l'expérience relativement au pendule à boule, et il m'exprima sa conviction que la divergence en question avait sa source dans l'emploi de la théorie ordinaire, qui suppose la pression égale dans toutes les directions. Il me décrivit aussi une remarquable expérience de Sir James South dont il avait été témoin. Cette expérience n'a pas encore été publiée, mais Sir James South m'a très obligeamment autorisé à la mentionner ici. Lorsqu'un pendule est en mouvement, on supposerait tout naturellement que l'air qui environne le corps en mouvement glisse le long de sa surface, ou, ce qui revient au même si l'on ne considère que le mouvement relatif, que la surface glisse sur l'air avec une vitesse comparable à la vitesse absolue de la surface elle-même. Mais, si l'on attache une feuille d'or à la base inférieure du pendule de manière qu'elle s'étale dans une direction perpendiculaire à la surface, et si l'on met le pendule en mouvement, on trouve que la feuille d'or conserve sa position perpendiculaire tout comme si le pendule était au repos. Et ce n'est que lorsque la feuille d'or est écartée à quelque distance de la surface qu'elle commence à se coucher en sens contraire du mouvement. Cette expérience montre clairement l'existence d'une action tangentielle entre le pendule et l'air, et entre une couche d'air et la suivante (1). Dans l'eau, l'existence d'une action toute

(1) J'ai cité, dans le tome IV de ce Recueil, *Bibliographie*, p. B-67, une expérience tout à fait analogue décrite par Dubuat en 1786. (C. W.)

semblable ressort clairement de quelques expériences de Coulomb qui seront citées dans la deuxième Partie de ce Mémoire, et, en fait, on pourrait la déduire de plusieurs phénomènes bien connus. Bien plus, Dubuat, en discutant les résultats de ces expériences sur les oscillations de sphères dans l'eau, remarque un léger accroissement de résistance correspondant à un accroissement de la durée d'oscillation, et il l'attribue expressément à la *viscosité* du fluide.

Plus tard, je m'occupai moi-même de la théorie du frottement des fluides et j'arrivai à des équations générales du mouvement, les mêmes dans les points essentiels que celles que d'autres avaient déjà obtenues d'une manière totalement différente et à mon insu, je dois le dire. Dès lors, j'eus le désir d'appliquer ces équations, s'il était possible, au calcul du mouvement de quelque espèce de pendule. La difficulté du problème est naturellement de beaucoup accrue par l'introduction du frottement intérieur; mais j'avais si grande confiance dans les parties essentielles de la théorie, que je ne pensais pas perdre mes peines à m'appliquer à un pareil travail. J'essayai d'abord le cas d'un long cylindre, la solution du problème me paraissant probablement plus simple que dans le cas d'une sphère. Mais, après avoir fait un bon bout de chemin vers le but, je fus arrêté par une difficulté relative à la détermination des constantes arbitraires qui se présentaient comme les coefficients d'une série infinie par laquelle était exprimée l'intégrale d'une certaine équation différentielle. Ayant donc échoué dans le cas d'un cylindre, j'essayai la sphère, et je trouvai, cette fois, que l'équation différentielle correspondante admettait une intégration en termes finis, si bien que la solution du problème pouvait être complètement effectuée. Le résultat que je trouvai concordait fort bien avec les expériences de Baily, lorsqu'on prenait convenablement la valeur d'une certaine constante; mais j'abandonnai le sujet pour quelque temps. M'étant, plus tard, attaqué à une intégrale définie à laquelle M. Airy avait été conduit dans la recherche de l'illumination au voisinage d'une caustique, je m'aperçus que la méthode que j'avais employée dans ce cas pouvait s'appliquer au problème de la résistance du fluide au mouvement d'un cylindre, et elle me mit à même de surmonter la difficulté contre laquelle je m'étais buté tout d'abord. Je poussai immédiatement le calcul numérique

aussi loin qu'il était nécessaire pour comparer les formules avec les expériences de Baily sur les tiges cylindriques, et j'eus la satisfaction de trouver un remarquable accord entre la théorie et l'observation. Ces résultats furent communiqués à la réunion de l'Association britannique, à Swansea, en 1848, et sont brièvement résumés dans le Volume des Rapports pour cette année.

Le Mémoire actuel est surtout consacré à la solution du problème dans les deux cas d'une sphère et d'un long cylindre, et à la comparaison des résultats avec les expériences de Baily et autres. Je forme les expressions de l'influence d'un fluide à la fois sur la durée et sur l'amplitude de l'oscillation d'un pendule, consistant, soit en une sphère, soit en une tige cylindrique, soit enfin en une sphère combinée avec une tige. Ces expressions ne contiennent qu'une seule constante dont on puisse disposer et qui a une signification physique fort simple : je propose de l'appeler l'*indice de frottement* du fluide. Nous pouvons concevoir cette constante déterminée par une seule observation, qui donnerait l'effet du fluide sur la durée ou sur l'amplitude de l'oscillation d'un pendule d'une des formes susmentionnées, et alors la théorie doit pouvoir prédire l'effet produit aussi bien sur la durée que sur l'amplitude d'oscillation de tous ces pendules. L'accord de la théorie avec les expériences de Baily sur la durée d'oscillation est remarquablement exact. Et même, la loi du décroissement de l'arc d'oscillation, qu'il n'entrait pas dans le but de Baily de mesurer autrement qu'il n'était nécessaire pour déterminer la petite réduction aux oscillations infiniment petites, s'accorde avec le résultat du calcul théorique aussi bien qu'on peut raisonnablement le demander dans de telles conditions.

Il ressort de la théorie qu'avec une sphère ou une tige cylindrique donnée, le facteur n augmente en même temps que la durée de l'oscillation. Ce fait explique dans une bonne mesure la valeur si grande de k, que Bessel a obtenue pour l'air, ainsi qu'on le verra tout au long dans ce travail ; mais il est incontestable aussi que cet accroissement de k provient en très grande partie de l'accroissement de résistance dû à l'existence d'une paroi rigide au voisinage de la boule oscillante.

J'ai déduit la valeur de l'indice de frottement de l'eau de quelques expériences de Coulomb sur le décrément de l'arc d'os-

cillation de disques oscillants dans l'eau dans leur propre plan par la torsion d'un fil. Lorsqu'on introduit la valeur numérique ainsi obtenue dans l'expression de la durée d'oscillation d'une sphère, le résultat concorde très exactement avec les expériences de Bessel sur une sphère oscillant dans l'eau.

Mon Mémoire contient une ou deux applications de la théorie du frottement intérieur à des problèmes qui offrent quelque intérêt, quoiqu'ils ne se rapportent pas au pendule. La résistance au mouvement uniforme d'une sphère dans un fluide peut se calculer comme un cas limite de la résistance au mouvement d'une boule de pendule, pourvu que les conditions soient telles que l'on puisse négliger le carré de la vitesse. On trouve que la résistance ainsi déterminée est proportionnelle, pour un fluide donné et une vitesse donnée, non pas à la surface, mais au rayon de la sphère; par conséquent, la force accélératrice de la résistance croît beaucoup plus rapidement, à mesure que décroît le rayon de la sphère, que si la résistance variait comme la surface, ainsi que le voudrait la théorie ordinaire. En conséquence, la résistance éprouvée par un petit globule d'eau tombant à travers l'air avec sa vitesse finale dépend presque entièrement du frottement intérieur de l'air. Comme l'indice de frottement de l'air est connu d'après les expériences du pendule, nous pouvons aisément calculer la vitesse finale d'un globule de grosseur donnée, en négligeant la partie de la résistance qui dépend du carré de la vitesse. La vitesse finale ainsi calculée est si faible dans le cas de petits globules, tels que ceux dont nous pouvons concevoir qu'un nuage est formé, que la suspension apparente des nuages ne semble plus présenter aucune difficulté. Si la résistance avait été déterminée d'après la théorie ordinaire, il eût fallu supposer ces globules beaucoup plus petits pour trouver dans cette résistance de l'air l'explication du phénomène. Comme, dans le cas de petits globules tombant avec leur vitesse finale, la part de résistance dépendant du carré de la vitesse, telle que la donne la théorie ordinaire, est absolument insignifiante comparée à la part qui dépend du frottement intérieur de l'air, il s'ensuit que, si la pression était égale dans toutes les directions, dans l'air à l'état de mouvement, la quantité d'eau qui resterait suspendue à l'état de nuage serait énormément diminuée. Ainsi, le pendule, à côté de ses autres usages, nous apporte

encore d'utiles renseignements en ce qui concerne la Météorologie.

La cinquième Section de la première Partie du présent Mémoire contient une recherche de l'effet du frottement intérieur de l'eau sur l'apaisement progressif d'une série de vagues oscillatoires. Il ressort du résultat que, dans le cas des longues houles de l'Océan, l'effet du frottement est insignifiant, tandis que dans le cas de rides soulevées par le vent sur un lac peu étendu, le mouvement s'apaise très vite après que la force troublante a cessé d'agir [1].

PREMIÈRE PARTIE.

ÉTUDE ANALYTIQUE.

Première Section.

Adaptation des équations générales au cas d'un fluide environnant un corps qui oscille comme un pendule. Lois générales qui ressortent de la forme des équations. Solution des équations dans le cas d'un plan oscillant.

1. Dans un Mémoire *Sur les théories du frottement intérieur des fluides en mouvement*, etc., que la Société de Cambridge m'a fait l'honneur de publier dans le VIIIe Volume de ses *Transactions*, je suis arrivé aux équations suivantes pour calculer le mouvement d'un fluide lorsqu'on tient compte du frottement intérieur du fluide lui-même et que, par conséquent, la pression n'est pas supposée égale dans toutes les directions

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= \rho\left(X - \frac{du}{dt} - u\frac{du}{dx} - v\frac{du}{dy} - w\frac{du}{dz}\right) \\ &\quad + \mu\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right) + \frac{\mu}{3}\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right), \end{aligned}\right.$$

---

[1] Je n'ai pas cru devoir reproduire ici les trois derniers articles de cette cinquième Section. Le sujet qui y est traité est complètement étranger à la question du pendule. Et d'autre part, M. Stokes a bien voulu m'avertir que le résultat auquel il est arrivé n'est pas tout à fait exact, par suite d'une omission qui a été signalée par M. Boussinesq. (C. W.)

avec deux autres équations qui s'écrivent immédiatement par symétrie. Dans ces équations, u, v, w sont les composantes de la vitesse suivant les axes rectangulaires des x, y et z; X, Y, Z sont les composantes de la force accélératrice; p est la pression, t le temps, ρ la densité et μ une certaine constante dépendant de la nature du fluide.

Les trois équations dont (1) est le type ne sont pas les équations générales du mouvement qui s'appliquent à un fluide hétérogène lorsqu'on tient compte du frottement intérieur, et qui sont les équations (10) de mon premier Mémoire; elles s'appliquent à un fluide homogène incompressible ou à un fluide homogène élastique soumis à de petites variations de densité, telles que celles qui accompagnent les vibrations sonores. Il doit être entendu que le terme *homogène* comprend l'uniformité de température dans toute la masse, sauf les élévations ou les abaissements qui peuvent naître d'une condensation ou d'une raréfaction brusque dans le cas d'un fluide élastique. Les équations générales contiennent les coefficients différentiels de la quantité μ par rapport à x, y et z; mais les équations de la forme (1), dans leur état actuel, sont encore plus générales qu'il n'est nécessaire pour le but du présent travail.

Ces équations s'accordent en général avec celles qui ont été précédemment obtenues, d'après des principes différents, par Navier, par Poisson et par M. de Saint-Venant, ainsi que je l'ai fait remarquer ailleurs [1]. Les différences ne portent que sur le coefficient du dernier terme, et ce terme s'évanouit dans le cas d'un fluide incompressible, auquel Navier a borné ses investigations [2].

---

(1) *Rapport sur des recherches récentes d'Hydrodynamique* (*Report of the British Association for* 1846, p. 16).

(2) J'avais eu l'intention de reproduire ici la partie du Mémoire de M. Stokes : *Sur les théories du frottement intérieur des fluides en mouvement* (*Transactions of the Cambridge philosophical Society*, vol. III, Part II, p. 287; 1847), dans laquelle il a établi les équations (1). Mais M. Stokes m'a fait remarquer que ces équations peuvent et doivent être considérées comme connues : « Navier a donné bien avant moi les équations du mouvement d'un liquide où l'on tient compte de la viscosité, et Poisson a donné les équations correspondantes pour un fluide élastique ou non; ses équations contiennent deux constantes qui dépendent de la nature du fluide, et elles se réduisent à celles de Navier si le fluide est incompressible. Elles diffèrent des équations ordinaires de l'Hydrodynamique par

Les équations (1), sous leur forme actuelle, sont un peu compliquées; mais, lorsqu'on les applique au cas d'un pendule, elles peuvent être bien simplifiées, sans négliger aucune des quantités qu'il importe de retenir. D'abord, le mouvement est supposé très petit, et, par suite, il est permis de négliger les termes qui contiennent le carré de la vitesse. En second lieu, la nature du mouvement auquel nous avons affaire est telle que la compressibilité du fluide n'a qu'une très faible influence sur le résultat, si bien que nous pouvons traiter le fluide comme incompressible et, par conséquent, omettre les derniers termes dans les équations. Enfin, les forces X, Y, Z sont, dans le cas actuel, les composantes de la force de pesanteur, et, si nous écrivons au lieu de p

$$p + \Pi + \rho \int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

nous pouvons omettre les termes X, Y et Z.

Si z' est mesuré verticalement de haut en bas à partir d'un plan horizontal mené dans le voisinage du pendule, et si g est la force de la gravité, $\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = gz'$, la constante arbitraire, ou la fonction arbitraire du temps si l'on trouvait nécessaire de la supposer telle, étant comprise dans Π. La partie de la force totale agissant sur le pendule qui dépend des termes $\Pi + g\rho z'$ est tout simplement une force égale au poids du fluide

---

l'introduction dans la première de termes qui peuvent se mettre sous la forme

$$\mu\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right) + \nu\,\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right),$$

avec des termes semblables dans la deuxième et la troisième. Mes équations seraient identiques à celles de Poisson, si je n'y avais introduit que les hypothèses qui sont le fondement même de ma méthode. Mais une hypothèse additionnelle qui, sans être fondamentale, m'a paru présenter un très haut degré de probabilité, y a réduit les deux constantes à une seule, en établissant entre elles la relation

$$\mu = 3\nu.$$

Maxwell est arrivé plus tard aux mêmes équations, avec la même relation entre les deux constantes, en partant de sa théorie dynamique des gaz (*Philosophical Transactions*, 1867, p. 81). Il me semble donc sans intérêt de traduire la première partie de mon premier Mémoire; les équations différentielles partielles qu'il faut appliquer à la solution du problème de la résistance au mouvement du pendule peuvent être regardées comme connues, puisqu'elles ont été obtenues indépendamment par plusieurs géomètres, qui s'accordent tous les uns avec les autres. »

(C. W.)

déplacé et agissant verticalement de bas en haut sur le centre de gravité du volume.

Simplifiées de cette manière, les équations de la forme (1) deviennent

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dp}{dx} = \mu\left(\dfrac{d^2u}{dx^2} + \dfrac{d^2u}{dy^2} + \dfrac{d^2u}{dz^2}\right) - \rho\dfrac{du}{dt}, \\ \dfrac{dp}{dy} = \mu\left(\dfrac{d^2v}{dx^2} + \dfrac{d^2v}{dy^2} + \dfrac{d^2v}{dz^2}\right) - \rho\dfrac{dv}{dt}, \\ \dfrac{dp}{dz} = \mu\left(\dfrac{d^2w}{dx^2} + \dfrac{d^2w}{dy^2} + \dfrac{d^2w}{dz^2}\right) - \rho\dfrac{dw}{dt}, \end{cases}$$

qui, avec l'équation de continuité

$$(3)\quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

sont les seules équations qui doivent être satisfaites à tout instant et en tous les points du fluide.

Dans l'application des équations (2) à une expérience particulière du pendule, nous pouvons supposer μ constant ; mais, si nous voulons comparer des expériences faites en été avec d'autres faites en hiver, ou des expériences faites sous une forte pression barométrique avec des expériences sous faible pression, il devient nécessaire de regarder μ comme une quantité qui peut varier avec la température et la pression du fluide. Autant que le résultat d'une seule expérience [1] qui a déjà été mentionnée, faite avec un seul fluide élastique, l'air, permet de tirer une conclusion aussi générale, nous pouvons affirmer que, pour un fluide donné, à une température donnée, μ varie de la même manière que ρ [2].

2. Pour la manière d'établir les équations de la forme (1), je dois renvoyer à mon premier Mémoire ; mais il est possible en peu de mots de mettre le lecteur en état de se former une idée claire de la signification de la constante μ.

---

[1] C'est l'expérience VI de Sabine (*voir* p. 157 de ce Volume). (C. W.)

[2] La première des expériences décrite dans le Mémoire du colonel Sabine, dans laquelle l'éprouvette se tenait à la hauteur de 7 pouces, conduit à la même conclusion ; mais, comme l'appareil où l'on faisait le vide n'avait pas encore été rendu étanche, il serait peut-être imprudent de s'appuyer sur cette expérience dans une question aussi délicate.

Concevons le fluide se mouvant par couches parallèles au plan des xy, le mouvement ayant lieu dans une direction parallèle à l'axe des y. Le mouvement consistera évidemment en une sorte de glissement continu, et le coefficient différentiel $\frac{dv}{dz}$ pourra être pris pour mesure de la vitesse du glissement. On suppose dans la théorie qu'en général la pression autour d'un point donné se compose d'une pression normale, dépendante de la densité, et qui, étant normale, est nécessairement égale dans toutes les directions, et d'une pression oblique ou tension, variable d'une direction à l'autre, laquelle est exprimée à l'aide de fonctions linéaires des neuf coefficients différentiels du premier ordre de u, v, w, par rapport à x, y, z, qui définissent l'état de mouvement relatif en chaque point du fluide. Mais, dans le cas spécial défini plus haut, si nous nous bornons à considérer une seule direction, celle du plan des xy, la pression totale rapportée à l'unité de surface se compose d'une pression normale en rapport avec la densité, et d'une pression tangentielle exprimée par $\mu\frac{dv}{dz}$, qui tend à réduire le mouvement relatif.

Dans la solution des équations (2), μ entre toujours avec ρ en diviseur. Faisons $\mu = \mu'\rho$. On pourra appeler μ' l'*indice de frottement* du fluide, liquide ou gaz, auquel il se rapporte. Quant à ses dimensions, il représente une force motrice divisée par le produit d'une surface, d'une densité, et du coefficient différentiel d'une vitesse par rapport à une ligne. Ainsi μ' est le carré d'une ligne divisé par un temps, et il est facile d'adapter la valeur numérique de μ' à toute unité nouvelle de longueur ou de temps.

3. Outre les équations générales (2) et (3), il y aura à considérer les équations de condition aux limites du fluide. Pour le but que nous nous proposons dans ce Mémoire, il n'y aura jamais lieu de considérer le cas d'une surface libre, mais seulement celui de la surface commune du fluide et d'un solide. Or, pour que le fluide, immédiatement en contact avec un solide, pût couler sur lui avec une vitesse finie, il faudrait que le solide exerçât sur le fluide un frottement infiniment plus faible que celui que le fluide exerce sur lui-même. Car concevons la couche élémentaire de fluide comprise entre la surface du solide et une surface parallèle à la

distance h, et ne considérons que la portion de cette couche qui correspond à une portion élémentaire ds de la surface du solide. Il doit y avoir équilibre entre les forces données qui agissent sur l'élément fluide et les forces effectives prises en sens contraire. Concevons maintenant que h s'évanouisse par rapport aux dimensions linéaires de ds, et que finalement ds s'évanouisse également ([1]). Il est évident que les conditions de l'équilibre se réduiront finalement à celle-ci, que la pression oblique que l'élément fluide éprouve du côté du solide doit être égale et opposée à la pression qu'il éprouve du côté du fluide. Or, si le fluide pouvait couler le long du solide avec une vitesse finie, il s'ensuivrait que la pression tangentielle mise en jeu par le glissement continu du fluide sur lui-même ne serait pas même contrebalancée par le glissement rude et inégal du fluide sur le solide. Comme cela paraît *a priori* excessivement improbable, il semble raisonnable d'examiner en premier lieu les conséquences de la supposition qu'il n'y a pas de pareil glissement du fluide sur le solide, d'autant mieux que les difficultés mathématiques du problème seront ainsi matériellement diminuées. Je prendrai donc, comme condition devant être satisfaite aux limites du fluide, que la vitesse d'une particule fluide doit être égale, en grandeur et en direction, à celle de la particule solide avec laquelle elle est en contact. Les résultats déduits de cette hypothèse montrent, en réalité, l'accord le plus satisfaisant avec l'observation. Si le fluide, au lieu d'être confiné dans une enveloppe rigide, s'étend indéfiniment autour du corps oscillant, nous devrons introduire dans la solution, au lieu de la condition à satisfaire à la surface de l'enveloppe, celle que le mouvement s'évanouit à une distance infinie.

Pour compléter la détermination des fonctions arbitraires qui devraient entrer dans les intégrales de (2) et (3), il faudrait faire $t = 0$ dans les expressions générales de u, v, w, obtenues en

([1]) Pour être absolument précis, il faudrait dire : Concevons que h et ds s'évanouissent ensemble, h s'évanouissant comparativement aux dimensions linéaires de ds; car, aussi longtemps que ds reste fini, nous ne pouvons supposer que h s'évanouisse entièrement, en raison de la courbure de la surface élémentaire. Mais une si extrême précision dans des points peu importants ne ferait, je pense, que troubler le lecteur et l'empêcher d'entrer aussi facilement dans l'esprit de la méthode.

intégrant ces équations, et égaler les résultats aux vitesses initiales que l'on supposerait données. Mais ce serait introduire dans la solution une complication bien inutile que de tenir compte des circonstances initiales, et il n'est nullement nécessaire de le faire pour pouvoir comparer la théorie avec l'expérience ; car, dans une expérience du pendule, l'appareil est mis en mouvement, puis abandonné à lui-même, et la première observation ne se fait qu'après plusieurs oscillations accomplies, lorsque toutes les irrégularités provenant du mouvement initial ont eu le temps de disparaître. Il sera donc bien suffisant de regarder le mouvement comme ayant pris son allure normale et de limiter le calcul à la détermination des mouvements périodiques simultanés du pendule et du fluide qui l'entoure. L'arc d'oscillation ira en décroissant lentement, mais il restera assez constant pendant une suite d'oscillations pour qu'on puisse le regarder comme rigoureusement tel dans le calcul du mouvement du fluide ; et, après avoir ainsi calculé l'action résultante du fluide sur le solide, nous pourrons employer le résultat à calculer le décroissement de l'arc d'oscillation, aussi bien qu'à calculer la durée de l'oscillation. Ainsi l'emploi de fonctions périodiques du temps dans les expressions de u, v, w, tiendra lieu de la détermination de certaines fonctions arbitraires à l'aide des circonstances initiales.

4. Imaginons un plan mené perpendiculairement à l'axe des x par le point du fluide dont les coordonnées sont x, y et z. Décomposons la pression oblique à la direction de ce plan en trois pressions, l'une normale dans la direction des x, les deux autres tangentielles respectivement parallèles aux y et aux z. Soient P_1 la pression normale, et T_3 la pression tangentielle dans la direction des y, laquelle sera égale à la composante parallèle aux x de la pression oblique sur un plan perpendiculaire à l'axe des y. Alors, d'après la formule (3), et d'autres que j'ai établies précédemment,

$$P_1 = p - 2\mu\frac{du}{dx}, \tag{4}$$

$$T_3 = -\mu\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right). \tag{5}$$

Ces formules seront nécessaires pour trouver la force résultante du fluide sur le pendule, lorsque le mouvement du fluide aura été

déterminé en fonction des quantités par lesquelles est exprimé le mouvement du pendule.

5. Avant de procéder à la solution des équations (2) et (3) dans des cas particuliers, il est bon d'examiner les lois générales qui ressortent simplement des dimensions de quelques-uns des termes qui entrent dans ces équations.

Considérons un nombre quelconque de systèmes semblables, composés de solides semblables oscillant d'une manière semblable dans différents fluides ou dans un même fluide. Soient a, a', a'', ... des lignes homologues dans les différents systèmes ; T, T', T'', ... des temps correspondants, tels que, par exemple, les durées d'oscillation comprises entre deux repos consécutifs. Nous mesurerons x, y, z à partir d'origines semblablement situées, et dans des directions correspondantes, et t à partir d'époques correspondantes, telles que, par exemple, les commencements d'une oscillation quand les systèmes se mettent en mouvement dans le même sens après avoir été écartés du même côté de leur position moyenne.

La forme des équations (2) et (3) montre que, si elles sont satisfaites pour un système, elles le seront pour tous, à la condition que

$$u \propto v \propto w, \quad x \propto y \propto z, \qquad \text{et} \qquad p \propto \frac{\mu u}{x} \propto \frac{\rho u x}{t} \text{ (1)}.$$

Les variations $x \propto y \propto z$ signifient simplement que l'on doit comparer des points semblablement situés lorsqu'on veut déduire du fait que (2) et (3) sont satisfaites pour un seul système la conséquence qu'elles le sont pour tous les systèmes. Si c, c', c'', ... sont les excursions maximum de points des fluides semblablement situés,

$$u \propto \frac{c}{\mathrm{T}}, \quad x \propto a, \quad t \propto \mathrm{T},$$

et la seule condition à satisfaire, outre celle de la similitude géométrique, pour que les systèmes soient dynamiquement sem-

(1) Ce signe $\propto$ indique que les quantités qu'il réunit varient proportionnellement.

blables, devient

$$(6)\qquad \frac{a^2}{T} \propto \frac{\mu}{\rho} \quad \text{ou} \quad \propto \mu'.$$

Cette condition étant satisfaite, des mouvements semblables auront lieu dans tous les systèmes et nous aurons

$$(7)\qquad p \propto \frac{\rho a c}{T^2}.$$

Il suit des équations (4) et (5) et des autres qu'on écrirait à la suite par symétrie, que les pressions, telles que P_1, T_3, varient de la même manière que p et, par suite, il appert de (7) que la résultante ou les résultantes des pressions des fluides sur les solides, agissant le long de lignes semblablement situées, qui varient comme pa^2, varient comme ρa^3 et cT^{-2} conjointement. En d'autres termes, ces résultantes dans deux systèmes semblables sont l'une à l'autre en raison composée du rapport des masses de fluide déplacées, et du rapport des forces accélératrices effectives maxima appartenant à des points semblablement situés dans les solides.

6. Pour que la similitude existe entre deux systèmes dans lesquels les fluides sont confinés dans des enveloppes assez étroites pour influencer le mouvement de ces fluides, il est nécessaire que les enveloppes soient semblables et semblablement placées par rapport aux solides qui oscillent dans leur intérieur, et que leurs dimensions linéaires soient dans le même rapport que celles des corps oscillants. En rigueur, il est également nécessaire que les solides soient semblablement placés par rapport à l'axe de rotation. Si cependant deux solides semblables, deux sphères par exemple, sont attachées à deux fils fins et assujetties à exécuter de petites oscillations dans deux masses illimitées de fluide, et si nous convenons de négliger l'influence des fils de suspension, et aussi l'influence de la rotation des sphères sur le mouvement du fluide, laquelle est en réalité excessivement petite, nous pourrons regarder les deux systèmes comme géométriquement semblables, et ils le seront au point de vue dynamique, pourvu que la condition (6) soit remplie. Si les deux fluides sont de même nature, comme, par exemple, lorsque deux sphères oscillent dans l'air, la

condition de similitude dynamique se réduit à celle-ci, que les durées d'oscillation soient comme les carrés des diamètres des sphères.

Si, avec Bessel, nous représentons l'influence de l'inertie du fluide sur la durée d'oscillation de la sphère en supposant une masse égale à k fois celle du fluide déplacé ajoutée à la masse de la sphère, et accroissant son inertie sans accroître son poids, nous devons nous attendre à trouver k dépendant de la nature du fluide et également du diamètre de la sphère. En fait, Bessel a obtenu des valeurs de k très différentes pour l'air et pour l'eau. Les expériences de Baily sur des sphères de différents diamètres, oscillant en une seconde à peu près, ont montré que la valeur de k augmente lorsque le diamètre de la sphère diminue. L'adoption, pour le moment, de ce résultat de l'expérience nous amène à conclure de la théorie que la valeur de k augmente avec la durée de l'oscillation ; en fait, k devrait subir le même accroissement que si nous avions laissé invariable la durée de l'oscillation, et diminué le diamètre dans le rapport suivant lequel est accrue la racine carrée de cette durée. On peut aisément faire voir que la valeur de k obtenue par la méthode de Bessel, à l'aide d'un long et d'un court pendule, est plus grande que celle qui convient au long pendule, plus grande même que celle qui convient au pendule court, qui faisait son oscillation en une seconde à peu près. La valeur de k donnée par Bessel est, en fait, considérablement plus grande que celle qu'a obtenue Baily par une méthode directe, au moyen d'une sphère à peu près de mêmes dimensions que les boules employées par Bessel et faisant aussi son oscillation en une seconde environ.

La discussion des expériences de Baily et de Bessel forme la Partie II de ce Mémoire. Je n'indique ici brièvement ces expériences que pour montrer qu'on peut tirer aisément des équations générales certains résultats d'un haut intérêt, sans avoir besoin de les résoudre.

7. Avant d'aborder le problème qui fait le sujet de ce Mémoire, il est bon de donner la solution des équations (2) et (3) dans le cas extrêmement simple d'un plan oscillant.

Concevons un plan physique, que nous regarderons comme

indéfini, situé dans une masse illimitée de fluide, et accomplissant de petites oscillations dans la direction d'une ligne fixe dans le plan. Prenons pour plan des yz un plan fixe coïncidant avec le plan mobile, l'axe des y étant parallèle à la direction du mouvement, et considérons seulement la portion du fluide qui se trouve du côté positif du plan des yz. Dans ce cas, nous avons évidemment $u = 0$, $w = 0$; p et v seront des fonctions de x et de t, que nous avons à déterminer. L'équation (3) est satisfaite identiquement, et nous tirons de (2) en posant $\mu = \mu'\rho$,

$$(8) \qquad \frac{dp}{dx} = 0, \qquad \frac{dv}{dt} = \mu' \frac{d^2 v}{dx^2}.$$

La première de ces équations donne $p =$ const., car il ne peut évidemment être une fonction de t, puisque l'effet du mouvement s'annule à une distance infinie du plan ; et, si nous comprenons cette constante dans Π, nous aurons $p = 0$. Soit V la vitesse du plan lui-même, et, si nous supposons

$$(9) \qquad V = c \sin nt,$$

en faisant dans la seconde des équations (8),

$$(10) \qquad v = X_1 \sin nt + X_2 \cos nt,$$

nous obtenons

$$(11) \qquad nX_1 = \mu' \frac{d^2 X_2}{dx^2}, \qquad nX_2 = -\mu' \frac{d^2 X_1}{dx^2} = -\frac{\mu'^2}{n} \frac{d^4 X_2}{dx^4}.$$

La dernière de ces équations donne

$$X_2 = e^{-x\sqrt{\frac{n}{2\mu'}}} \left(\mathrm{A} \sin x\sqrt{\frac{n}{2\mu'}} + \mathrm{B} \cos x\sqrt{\frac{n}{2\mu'}} \right) + e^{x\sqrt{\frac{n}{2\mu'}}} \left(\mathrm{C} \sin x\sqrt{\frac{n}{2\mu'}} + \mathrm{D} \cos x\sqrt{\frac{n}{2\mu'}} \right).$$

Puisque X_2 ne devient pas infini lorsque $x = \infty$, nous devons avoir $\mathrm{C} = 0$, $\mathrm{D} = 0$. Tirant X_1 de la première des équations (11) et le substituant dans (10), nous obtenons

$$v = e^{-x\sqrt{\frac{n}{2\mu'}}} \left[-\mathrm{A} \sin\left(nt - x\sqrt{\frac{n}{2\mu'}} \right) + \mathrm{B} \cos\left(nt - x\sqrt{\frac{n}{2\mu'}} \right) \right].$$

Maintenant, en vertu des équations de condition définies par

l'Art. 3, nous devons avoir $v = V$ pour $x = 0$, d'où

$$(12) \qquad v = c e^{-x\sqrt{\frac{n}{2\mu'}}} \sin\left(nt - x\sqrt{\frac{n}{2\mu'}}\right).$$

Pour trouver les composantes normale et tangentielle de la pression du fluide sur le plan, il nous faut substituer la valeur ci-dessus de v dans les formules (4) et (5), et, après différentiation, faire $x = 0$. P_1 et T_3 seront alors les composantes de la pression du solide sur le fluide et, par conséquent $-P_1$ et $-T_3$ seront celles de la pression du fluide sur le solide. On obtient ainsi

$$(13) \quad P_1 = 0, \quad T_3 = c\rho\sqrt{\frac{n\mu'}{2}}(\sin nt + \cos nt) = \rho\sqrt{\frac{n\mu'}{2}}\left(V + \frac{1}{n}\frac{dV}{dt}\right).$$

La force représentée par le premier de ces termes tend à diminuer l'amplitude des oscillations du plan. Celle que représente le second terme a le même effet en ce qu'elle accroît l'inertie du plan.

8. L'équation (12) montre qu'une phase donnée d'oscillation se propage à partir du plan dans l'intérieur du fluide avec une vitesse $\sqrt{2\mu' n}$, tandis que l'amplitude de l'oscillation décroît en progression géométrique à mesure que la distance au plan croît en progression arithmétique. Si nous supposons que la durée de l'oscillation entre deux repos consécutifs est d'une seconde, $n = \pi$; et, si nous supposons $\sqrt{\mu'} = 0,116$ pouce anglais, ce qui est à peu près sa valeur dans le cas de l'air, comme on va le voir tout à l'heure, nous aurons pour la vitesse de propagation 0,2908 pouce environ par seconde. Si nous cherchons la distance au plan à laquelle l'amplitude de l'oscillation est réduite à moitié, nous n'avons qu'à faire $x\sqrt{\frac{n}{2\mu'}} = \log \text{nép.}\, 2$, ce qui donne, dans les mêmes hypothèses que précédemment sur les valeurs numériques des constantes, $x = 0,06415$ pouce environ. Pour l'eau, la valeur de μ' est de beaucoup plus petite que pour l'air, et la valeur correspondante de x également plus petite, puisqu'elle varie, toutes choses égales d'ailleurs, comme la racine carrée de μ'. D'après cela, si un solide de révolution, de dimensions grandes ou même modérément grandes, est suspendu par un fil fin coïncidant avec l'axe de révolution, et qu'on le fasse osciller en tordant le fil, on pourra calculer l'influence du fluide avec un degré très élevé d'approxima-

tion, en regardant chaque élément de la surface du solide comme un élément d'un plan indéfini oscillant avec la même vitesse linéaire.

Par exemple, suspendons horizontalement un disque circulaire de rayon a par un fil fin attaché en son centre et faisons-le osciller. Soient r le rayon vecteur d'un élément du disque, mesuré à partir du centre, θ l'angle dont a tourné le disque à partir de sa position moyenne. Alors, dans l'équation (13), il faut faire

$$V = r\frac{d\theta}{dt},$$

d'où

$$T_3 = \rho\sqrt{\frac{n\mu'}{2}}\, r\left(\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{n}\frac{d^2\theta}{dt^2}\right).$$

L'aire de l'anneau du disque compris entre les rayons r et $r + dr$ est $4\pi r\, dr$, en comprenant les deux faces, et, si G est le moment total de la force exercée par le fluide sur le disque,

$$G = -4\pi\int_0^a r^2 T_3\, dr,$$

d'où

$$G = -\pi\rho a^4\sqrt{\frac{n\mu'}{2}}\left(\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{n}\frac{d^2\theta}{dt^2}\right).$$

Soit $M\gamma^2$ le moment d'inertie du disque, et n_1 ce que deviendrait n si le fluide n'existait pas, de telle sorte que $-n_1^2 M\gamma^2\theta$ est le moment de la force de torsion. Alors, en présence du fluide, l'équation du mouvement du disque devient

$$(14)\qquad \left(M\gamma^2 + \pi\rho a^4\sqrt{\frac{\mu'}{2n}}\right)\frac{d^2\theta}{dt^2} + \pi\rho a^4\sqrt{\frac{n\mu'}{2}}\frac{d\theta}{dt} + n_1^2 M\gamma^2\theta = 0.$$

Si nous posons, pour abréger,

$$\pi\rho a^4\sqrt{\frac{\mu'}{2n}} = 2\beta M\gamma^2,$$

il vient

$$(1 + 2\beta)\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2n\beta\frac{d\theta}{dt} + n_1^2\theta = 0,$$

ce qui donne, en négligeant β^2,

$$(15)\qquad \theta = \theta_0 e^{-n\beta t}\sin(nt + \alpha),$$

où

$$n = n_1(1 - \beta).$$

L'observation de n et de n_1, ou encore celle de n et du décrément de l'arc d'oscillation, suffirait pour déterminer β et par suite μ'. Les valeurs de β déterminées par l'une ou l'autre de ces méthodes doivent concorder.

Il n'y aurait pas de difficulté à obtenir une solution plus exacte, dans laquelle on tiendrait compte du décrément de l'arc d'oscillation dans le calcul du mouvement du fluide; mais je passe immédiatement aux problèmes, dont la solution est le but principal de ce Mémoire.

Section II.

Solution des équations dans le cas d'une sphère oscillant au milieu d'une masse de fluide, soit illimitée, soit confinée dans une enveloppe sphérique concentrique à la sphère dans sa position d'équilibre.

9. Supposons la sphère suspendue à un fil fin, dont la longueur soit beaucoup plus grande que le rayon de la sphère. Négligeons pour le moment l'action du fil sur le fluide, et bornons-nous à considérer celle de la sphère. Le mouvement de la sphère et du fil étant supposé parallèle à un plan vertical fixe, il y a deux modes d'oscillation possible. Nous n'avons pas à nous occuper des oscillations rapides qui dépendent uniquement de l'inertie rotatoire de la sphère, mais seulement des oscillations principales, qui sont celles que l'on observe dans les expériences du pendule. Dans ces oscillations principales, le centre de la sphère décrit un petit arc de courbe qui est à fort peu près un cercle, et qui le serait rigoureusement si la ligne qui joint le centre de gravité de la sphère au point de suspension était rigoureusement dans la direction du fil. Dans le calcul du mouvement du fluide, il est permis de regarder cet arc comme une ligne droite. En fait, l'erreur qu'on introduit ainsi ne serait qu'une petite quantité de second ordre, et nous supposons qu'on néglige ces quantités dans les recherches.

Outre son mouvement de translation, la sphère aura un mouvement de rotation autour d'un axe horizontal, le mouvement angulaire de la sphère étant à fort peu près le même que celui du fil

de suspension. Ce mouvement, qui ne produirait absolument aucun effet sur le fluide, d'après la théorie ordinaire de l'Hydrodynamique, cesse d'être sans influence dès qu'on tient compte du frottement; mais, en pratique, l'effet en est tellement petit, qu'il n'y a pas lieu d'en tenir compte; car, si a est le rayon de la sphère et l la longueur du fil de suspension, la vitesse d'un point de la surface de la sphère due au mouvement de rotation ne sera qu'une quantité de l'ordre al^{-1} auprès de la vitesse due au mouvement de translation. Si l'on cherche le moment des pressions du fluide sur le pendule, les forces qui naissent de ces vitesses et qui leur sont comparables doivent être multipliées par des lignes comparables respectivement à a et l. Par suite, le moment des pressions dû au mouvement de rotation de la sphère n'est qu'une petite quantité de l'ordre $a^2 l^{-2}$ par rapport au moment dû au mouvement de translation. Or, dans la pratique, l est ordinairement au moins vingt ou trente fois plus grand que a, et l'effet total dont il s'agit est très petit, si bien qu'il serait absolument inutile de tenir compte du mouvement de rotation de la sphère.

Le problème se réduit donc de lui-même à celui-ci. Le centre d'une sphère exécute de petites oscillations périodiques le long d'une ligne droite, la sphère elle-même n'étant animée que d'un simple mouvement de translation : on demande de déterminer le mouvement du fluide environnant.

10. Prenons pour origine la position moyenne du centre de la sphère, et pour axe des x la direction de son mouvement, de sorte que le mouvement du fluide est symétrique par rapport à cet axe. Soit ϖ la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque sur l'axe des x, q la vitesse dans la direction de ϖ, ω l'angle de la ligne ϖ avec le plan des xy. Les quantités p, u et q seront des fonctions de x, ϖ et t, et nous aurons

$$v = q\cos\omega, \qquad w = q\sin\omega, \qquad y = \varpi\cos\omega, \qquad z = \varpi\sin\omega;$$

d'où l'on déduit

$$\varpi^2 = y^2 + z^2, \qquad \omega = \operatorname{arc\,tang}\frac{z}{y}\cdot$$

Il faut maintenant substituer ces valeurs dans les équations (2)

et (3), et nous sommes libres de poser $\omega = 0$ après la différentiation. Nous obtenons

$$\frac{d}{dy} = \cos\omega \frac{d}{d\varpi} - \frac{\sin\omega}{\varpi}\frac{d}{d\omega}, \qquad = \frac{d}{d\varpi} \quad \text{pour} \quad \omega = 0,$$

$$\frac{d^2}{dy^2} = \frac{d^2}{d\varpi^2} \quad \text{lorsque} \quad \omega = 0,$$

$$\frac{d}{dz} = \sin\omega \frac{d}{d\varpi} + \frac{\cos\omega}{\varpi}\frac{d}{d\omega}, \qquad = \frac{1}{\varpi}\frac{d}{d\omega} \quad \text{pour} \quad \omega = 0,$$

$$\frac{d^2}{dz^2} = \frac{1}{\varpi}\frac{d}{d\varpi} + \frac{1}{\varpi^2}\frac{d^2}{d\omega^2} \quad \text{lorsque} \quad \omega = 0,$$

ce qui nous donne

$$(16) \qquad \frac{dp}{dx} = \mu\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{d\varpi^2} + \frac{1}{\varpi}\frac{du}{d\varpi}\right) - \rho\frac{du}{dt},$$

$$(17) \qquad \frac{dp}{d\varpi} = \mu\left(\frac{d^2q}{dx^2} + \frac{d^2q}{d\varpi^2} + \frac{1}{\varpi}\frac{dq}{d\varpi} - \frac{q}{\varpi^2}\right) - \rho\frac{dq}{dt},$$

$$(18) \qquad \frac{du}{dx} + \frac{dq}{d\varpi} + \frac{q}{\varpi} = 0.$$

Éliminant p entre (16) et (17) et remplaçant μ par son équivalent $\mu'\rho$, nous avons

$$\mu'\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{d\varpi^2} + \frac{1}{\varpi}\frac{d}{d\varpi}\right)u$$
$$- \mu'\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{d\varpi^2} + \frac{1}{\varpi}\frac{d}{d\varpi} - \frac{1}{\varpi^2}\right)q - \frac{d}{dt}\left(\frac{du}{d\varpi} - \frac{dq}{dx}\right) = 0,$$

ou

$$(19) \qquad \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{d\varpi^2} + \frac{1}{\varpi}\frac{d}{d\varpi} - \frac{1}{\varpi^2} - \frac{1}{\mu'}\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{du}{d\varpi} - \frac{dq}{dx}\right) = 0.$$

En vertu de (18), $\varpi(u\,d\varpi - q\,dx)$ est une différentielle exacte. Posons donc

$$(20) \qquad \varpi(u\,d\varpi - q\,dx) = d\psi;$$

exprimant alors u et q en fonction de ψ, nous aurons

$$\frac{du}{d\varpi} - \frac{dq}{dx} = \frac{1}{\varpi}\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{d\varpi^2} - \frac{1}{\varpi}\frac{d}{d\varpi}\right)\psi.$$

En substituant cette valeur dans (19) et opérant séparément sur le

facteur ϖ^{-1}, nous obtenons

$$(20') \qquad \left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{d\varpi^2}-\frac{1}{\varpi}\frac{d}{d\varpi}-\frac{1}{\mu'}\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{d\varpi^2}-\frac{1}{\varpi}\frac{d}{d\varpi}\right)\psi=0.$$

Comme les opérations représentées par les deux expressions entre parenthèses sont évidemment réversibles, l'intégrale de cette équation est

$$(21) \qquad \psi=\psi_1+\psi_2,$$

où ψ_1 et ψ_2 sont les intégrales des équations

$$(22) \qquad \left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{d\varpi^2}-\frac{1}{\varpi}\frac{d}{d\varpi}\right)\psi_1=0,$$

$$(23) \qquad \left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{d\varpi^2}-\frac{1}{\varpi}\frac{d}{d\varpi}-\frac{1}{\mu'}\frac{d}{dt}\right)\psi_2=0.$$

11. Au moyen des trois dernières équations, l'expression de dp déduite de (16) et (17) se simplifie beaucoup. Nous avons d'abord

$$(24) \qquad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}=\left[\mu'\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{d\varpi^2}+\frac{1}{\varpi}\frac{d}{d\varpi}\right)-\frac{d}{dt}\right]\frac{1}{\varpi}\frac{d\psi}{d\varpi}.$$

Mais, en additionnant les équations (22) et (23) et tenant compte de (21), nous avons

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}=-\frac{d^2\psi}{d\varpi^2}+\frac{1}{\varpi}\frac{d\psi}{d\varpi}+\frac{1}{\mu'}\frac{d\psi_2}{dt}.$$

En substituant dans (24), on trouvera que tous les termes du second membre de l'équation se détruisent l'un l'autre, à l'exception de ceux qui contiennent $\frac{d\psi}{dt}$ et $\frac{d\psi_2}{dt}$, et l'équation se réduit à

$$\frac{dp}{dx}=-\frac{\rho}{\varpi}\frac{d^2\psi_1}{dt\,d\varpi}.$$

L'équation (17) se réduit de la même manière et nous obtenons finalement

$$(25) \qquad dp=\frac{\rho}{\varpi}\left(\frac{d^2\psi_1}{dt\,dx}d\varpi-\frac{d^2\psi_1}{dt\,d\varpi}dx\right),$$

qui est une différentielle exacte en vertu de (22).

12. Passant aux coordonnées polaires, désignons par r le rayon vecteur mené à partir de l'origine, par θ l'angle de r avec l'axe des x, et soient R la vitesse le long du rayon vecteur, Θ la vitesse perpendiculaire à ce rayon ; alors

$$x = r\cos\theta, \quad \varpi = r\sin\theta, \quad u = R\cos\theta - \Theta\sin\theta, \quad q = R\sin\theta + \Theta\cos\theta.$$

En substituant ces valeurs dans (20), (22), (23) et (25), on obtient

$$(26) \qquad r\sin\theta\,(R\,r\,d\theta - \Theta\,dr) = d\psi,$$

$$(27) \qquad \frac{d^2\psi_1}{dr^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d\psi_1}{d\theta}\right) = 0,$$

$$(28) \qquad \frac{d^2\psi_2}{dr^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d\psi_2}{d\theta}\right) - \frac{1}{\mu'}\frac{d\psi_2}{dt} = 0,$$

$$(29) \qquad dp = \frac{\rho}{r\sin\theta}\left(\frac{d^2\psi_1}{dt\,dr}\,r\,d\theta - \frac{1}{r}\frac{d^2\psi_1}{dt\,d\theta}\,dr\right).$$

Il nous faut maintenant déterminer ψ_1 et ψ_2 au moyen de (27) et (28) combinées avec les équations de condition. Une fois ces fonctions connues, p s'obtiendra en intégrant la différentielle exacte qui forme le second membre de (29), et les vitesses R, Θ, si l'on en a besoin, s'obtiendront par la différentiation indiquée par l'équation (26). Les formules déduites de (4) et de (5) feront alors connaître la pression du fluide sur la sphère.

13. Soit ξ l'abscisse du centre de la sphère à un certain moment. Les conditions à satisfaire à la surface de la sphère sont que, quand $r = r_1$ rayon vecteur de la surface, on ait

$$R = \cos\theta\,\frac{d\xi}{dt}, \qquad \Theta = -\sin\theta\,\frac{d\xi}{dt}.$$

Or r_1 ne diffère de a que d'une petite quantité du premier ordre, et, puisque cette valeur de r doit être substituée dans des fonctions qui sont déjà elles-mêmes de petites quantités de cet ordre, il suffira de poser $r = a$. D'après cela, exprimant R et Θ en fonction de ψ, nous obtenons

$$(30) \qquad \frac{d\psi}{dr} = a\sin^2\theta\,\frac{d\xi}{dt}, \qquad \frac{d\psi}{d\theta} = a^2\sin\theta\cos\theta\,\frac{d\xi}{dt}, \qquad \text{pour } r = a.$$

Si le fluide est illimité, on trouvera que certaines constantes arbitraires disparaissent par la condition que le mouvement ne devient pas infini à une distance infinie dans le fluide. Si le fluide est confiné dans une enveloppe ayant pour rayon b, nous aurons les équations de condition

$$(31) \qquad \frac{d\psi}{dr} = 0, \qquad \frac{d\psi}{d\theta} = 0, \qquad \text{pour } r = b.$$

14. Il nous faut maintenant, pour suivre le plan tracé dans la Section I, introduire la condition que la fonction ψ soit composée, en ce qui regarde le temps, des fonctions circulaires $\sin nt$ et $\cos nt$, c'est-à-dire qu'elle soit de la forme $P \sin nt + Q \cos nt$, P et Q étant fonctions de r et de θ seulement. Nous emploierons cependant, avec grand avantage, un artifice dont M. Cauchy a fait un fréquent usage. Au lieu d'introduire les fonctions circulaires $\sin nt$ et $\cos nt$, nous pouvons employer les exponentielles $e^{nt\sqrt{-1}}$ et $e^{-nt\sqrt{-1}}$. Comme nos équations sont linéaires et que chacune de ces fonctions exponentielles se reproduit elle-même à chaque différentiation, il est clair que, si tous les termes d'une quelconque de nos équations sont rangés en deux groupes, contenant l'un $e^{nt\sqrt{-1}}$ en facteur, et l'autre $e^{-nt\sqrt{-1}}$, les deux groupes seront absolument indépendants, et les équations devront être satisfaites pour chaque groupe séparément. Il suffira donc d'introduire une seule des deux fonctions exponentielles. De cette manière, nous n'aurons à écrire à la suite qu'un nombre de termes moitié moindre, et aussi à déterminer un nombre moitié moindre de constantes arbitraires, que si nous avions fait usage des fonctions circulaires. Quand nous serons arrivés au résultat, il suffira de mettre chaque équation sous la forme $U + V\sqrt{-1} = 0$, et de laisser de côté la partie imaginaire, ou encore de laisser de côté la partie réelle et de supprimer $\sqrt{-1}$, puisque le système des quantités U et le système des quantités V doivent satisfaire séparément les équations du problème. Prenant donc

$$\frac{d\xi}{dt} = ce^{nt\sqrt{-1}}, \qquad \psi = Pe^{nt\sqrt{-1}},$$

nous avons à déterminer P comme une fonction de r et de θ.

15. La forme des équations de condition (30) montre que $\sin^2\theta$ est un facteur de P, et, puisque l'opération $\sin\theta \frac{d}{d\theta} \frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta}$, accomplie sur la fonction $\sin^2\theta$, reproduit la même fonction avec le coefficient -2, il est possible de satisfaire aux équations (27) et (28) par la supposition que $\sin^2\theta$ est facteur de ψ et ψ_2 [1].

Posons donc

$$\psi_1 = e^{nt\sqrt{-1}} \sin^2\theta f_1(r), \qquad \psi_2 = e^{nt\sqrt{-1}} \sin^2\theta f_2(r),$$

si nous écrivons, pour plus de simplicité,

$$(32) \qquad n\sqrt{-1} = \mu' m^2,$$

et si nous substituons dans (27) et (28), nous obtenons

$$(33) \qquad f_1''(r) - \frac{2}{r^2} f_1(r) = 0,$$

$$(34) \qquad f_2''(r) - \frac{2}{r^2} f_2(r) - m^2 f_2(r) = 0.$$

Les équations de condition (30) et (31) deviennent, en mettant

---

[1] Lorsque cette opération est faite sur la fonction $\sin\theta \frac{dY_i}{d\theta}$, la fonction se reproduit avec le coefficient $-i(i+1)$; Y_i désigne ici un coefficient de Laplace du $i^{\text{ème}}$ ordre, qui ne contient qu'un seul angle variable, l'angle θ. Or ψ peut se développer en une série de termes dont la forme générale est $\sin\theta \frac{dY_i}{d\theta}$; car, puisque nous n'avons affaire qu'aux coefficients différentiels de ψ par rapport à r et θ, nous avons le droit de supposer que ψ s'évanouit à tel point de l'espace que nous voudrons. Soit donc $\psi = 0$ pour $r = a$ et $\theta = 0$. Pour trouver la valeur de ψ à une distance r de l'origine, le long de l'axe des x positifs, il suffira de faire $\theta = 0$, $d\theta = 0$ dans l'équation (26) et d'intégrer depuis $r = a$ jusqu'à r, d'où $\psi = 0$. Pour trouver la valeur de ψ à la même distance r le long de l'axe des x négatifs, il suffira de laisser r constant, et d'intégrer $d\psi$ depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \pi$. Se reportant à (26), on voit que l'intégrale s'annule, puisque le flux total à travers la surface de la sphère dont le rayon est r doit être égal à zéro. Par suite, ψ s'annule pour $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, et il suit de (26) que, lorsque θ est très petit ou très voisin de π, ψ varie en définitive comme $\sin^2\theta$ pour des valeurs données de r et de t. Par suite, ψ coséc θ, et aussi $\int \psi$ coséc $\theta\, d\theta$, est fini, même quand $\sin\theta$ s'annule, et par conséquent $\int \psi$ coséc $\theta\, d\theta$ peut se développer en une série de coefficients de Laplace; par conséquent, ψ lui-même peut se développer en une série de quantités de la forme $\sin\theta \frac{dY_i}{d\theta}$. C'est à peu près de cette manière que j'obtins d'abord la forme de la fonction ψ.

$f(r)$ pour $f_1(r)+f_2(r)$.

$$(35)\qquad f'(a)=ac,\qquad f(a)=\tfrac{1}{2}a^2c,$$

$$(36)\qquad f'(b)=0,\qquad f(b)=0.$$

Nous pouvons tirer p de (29) en mettant pour ψ_1 sa valeur $e^{\mu' m^2 t}\sin^2\theta f_1(r)$, remplaçant, après différentiation, $2f_1(r)$ par son équivalent $r^2 f_1''(r)$, et intégrant. Il n'est pas nécessaire d'ajouter une fonction arbitraire du temps, puisque cette fonction peut être supposée renfermée dans II. Nous obtenons ainsi

$$(37)\qquad p=-\rho\mu' m^2 e^{\mu' m^2 t}\cos\theta f_1'(r).$$

16. L'intégration de l'équation différentielle (33) n'offre aucune difficulté et (34) se présente sous une forme intégrable bien connue. Les intégrales de ces équations sont

$$(38)\qquad \begin{cases} f_1(r)=\dfrac{A}{r}+Br^2,\\ f_2(r)=Ce^{-mr}\left(1+\dfrac{1}{mr}\right)+De^{mr}\left(1-\dfrac{1}{mr}\right), \end{cases}$$

et nous avons à déterminer A, B, C, D par les équations de condition.

La solution du problème, dans le cas où le fluide est renfermé dans une enveloppe sphérique, contient, par conséquent, comme cas particulier, celui où le fluide est illimité, et, pour obtenir les résultats relatifs à ce dernier cas, il suffira d'y faire $b=\infty$. Comme cependant le cas d'un fluide illimité est à la fois plus simple et plus intéressant que le cas général, il est bon de le considérer séparément.

Désignons par $+m$ la racine carrée de $\mu'^{-1}n\sqrt{-1}$ qui a sa partie réelle positive; alors, dans les équations (38), nous devons avoir $D=0$, car autrement la vitesse serait infinie à une distance infinie. Nous devons avoir aussi $B=0$, puisque, autrement, la vitesse serait finie pour $r=\infty$, ainsi qu'il ressort de (26). Nous tirons alors des équations de condition (35)

$$A=\frac{1}{2}a^3c+\frac{3a^2c}{2m}\left(1+\frac{1}{ma}\right),\qquad C=-\frac{3ac}{2m}e^{ma},$$

d'où

$$(39)\qquad \xi = \frac{c}{\mu' m^2} e^{\mu' m^2 t},$$

$$(40)\qquad \left\{ \begin{aligned} \psi = \frac{1}{2} a^2 c e^{\mu' m^2 t} \sin^2\theta \Bigg[& \left(1 + \frac{3}{ma} + \frac{3}{m^2 a^2}\right)\frac{a}{r} \\ & - \frac{3}{ma}\left(1 + \frac{1}{mr}\right) e^{-m(r-a)} \Bigg], \end{aligned} \right.$$

$$(41)\qquad p = \frac{1}{2} \rho a c \mu' m^2 \left(1 + \frac{3}{ma} + \frac{3}{m^2 a^2}\right) e^{\mu' m^2 t} \cos\theta \frac{a^2}{r^2}.$$

17. Les équations symboliques (40) et (41) contiennent la solution du problème, le mouvement de la sphère étant défini par l'équation symbolique (39). Si nous voulons mettre en évidence les résultats effectifs au moyen de quantités réelles seulement, nous n'avons qu'à mettre les seconds membres des équations (39), (40) et (41) sous la forme $U + V\sqrt{-1}$, et à rejeter la partie imaginaire. Posant, pour abréger,

$$(42)\qquad \sqrt{\frac{n}{2\mu'}} = \nu,$$

nous avons $m = \nu(1 + \sqrt{-1})$ et nous obtenons

$$(43)\qquad \xi = \frac{c}{n} \sin nt,$$

$$(44)\qquad \left\{ \begin{aligned} \psi = \frac{1}{2} a^2 c \sin^2\theta \Bigg\{ & \left[\left(1 + \frac{3}{2\nu a}\right)\cos nt + \frac{3}{2\nu a}\left(1 + \frac{1}{\nu a}\right)\sin nt\right]\frac{a}{r} \\ & - \frac{3}{2\nu a} e^{-\nu(r-a)} \Bigg[\cos(nt - \nu r + \nu a) \\ & + \left(1 + \frac{1}{\nu r}\right)\sin(nt - \nu r + \nu a)\Bigg]\Bigg\}. \end{aligned} \right.$$

$$(45)\qquad p = -\frac{1}{2}\rho a c n\left[\left(1 + \frac{3}{2\nu a}\right)\sin nt - \frac{3}{2\nu a}\left(1 + \frac{1}{\nu a}\right)\cos nt\right]\cos\theta \frac{a^2}{r^2}.$$

Le lecteur remarquera que les ξ, ψ et p du présent article ne sont pas les mêmes que les ξ, ψ et p du précédent. Ces derniers sont les expressions imaginaires, dont les parties réelles consti-

tuent les premiers; mais il n'a pas semblé nécessaire de changer la notation.

Lorsque $\mu' = 0$, $\nu = \infty$, et ψ se réduit à

$$\frac{a^3 c}{2r} \sin^2\theta \cos nt \quad \text{ou} \quad \frac{a^3}{2r} \sin^2\theta \frac{d\xi}{dt}.$$

Dans ce cas, on tire de (26)

$$R = a^3 \frac{d\xi}{dt} \frac{\cos\theta}{r^3}, \qquad \Theta = \frac{1}{2} a^3 \frac{d\xi}{dt} \frac{\sin\theta}{r^3},$$

et $R\,dr + \Theta r\,d\theta$ est une différentielle exacte $d\Phi$, dans laquelle

$$\Phi = -\frac{1}{2} a^3 \frac{d\xi}{dt} \frac{\cos\theta}{r^2},$$

ce qui s'accorde avec le résultat déduit directement des équations ordinaires de l'Hydrodynamique [1].

18. Formons maintenant l'expression de la résultante des pressions du fluide sur les différents éléments de la surface de la sphère. Soit P_r la composante normale, T_θ la composante tangentielle de la pression en un point, sur le plan mené perpendiculairement au rayon vecteur. Les formules (4) et (5) sont générales; nous pouvons donc remplacer x et y dans ces formules par x' et y', x' et y' étant pris dans deux directions rectangulaires quelconques. Faisons passer le plan des $x'y'$ par l'axe des x et le rayon vecteur, et supposons l'axe des x' incliné sur celui des x d'un angle $\Im$, qui, après différentiation, sera fait égal à θ. Alors P_1 et T_3 deviendront respectivement P_r et T_θ. Nous avons

$$u' = R\cos(\theta - \Im) - \Theta\sin(\theta - \Im), \qquad v' = R\sin(\theta - \Im) + \Theta\cos(\theta - \Im),$$

et, lorsque $\Im = \theta$,

$$\frac{d}{dx'} = \frac{d}{dr}, \qquad \frac{d}{dy'} = \frac{d}{r\,d\theta},$$

$$\frac{du'}{dx'} = \frac{dR}{dr}, \qquad \frac{du'}{dy'} = \frac{dR}{r\,d\theta} - \frac{\Theta}{r}, \qquad \frac{dv'}{dx'} = \frac{d\Theta}{dr};$$

---

(1) *Voir* les *Trans. phil. de Cambridge*, vol. VIII, p. 119.

d'où

$$(46)\qquad P_r = p - 2\mu\frac{dR}{dr},\qquad T_\theta = -\mu\left(\frac{dR}{r\,d\theta} + \frac{d\Theta}{dr} - \frac{\Theta}{r}\right).$$

Dans ces formules, supposons que l'on fasse r égal à a après différentiation. Alors P_r, T_θ seront les composantes dans la direction de r, θ de la pression de la sphère sur le fluide. La décomposition de ces forces donnera dans la direction des x une pression

$$P_r \cos\theta - T_\theta \sin\theta,$$

qui sera égale et opposée à la composante, dans la direction des x, de la pression du fluide sur la sphère. Soit F la force totale exercée par le fluide sur la sphère, qui agira évidemment suivant l'axe des x. Alors, en remarquant que $2\pi a^2 \sin\theta\, d\theta$ est l'aire d'un anneau élémentaire de la surface de la sphère, on obtient

$$(47)\qquad F = 2\pi a^2 \int_0^\pi (-P_r\cos\theta + T_\theta \sin\theta)_a \sin\theta\, d\theta,$$

l'indice a marquant que r est supposé avoir la valeur a dans les expressions générales de P_r et de T_θ.

L'expression de F peut se simplifier beaucoup, sans avoir recours à la résolution des équations (27) et (28), si l'on combine ces équations dans leur état primitif avec les équations de condition (30). En premier lieu, on tire de (26)

$$(48)\qquad R = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\,\frac{d\psi}{d\theta},\qquad \Theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{d\psi}{dr}.$$

Puis les équations (30) font connaître les valeurs de ψ et de $\frac{d\psi}{dr}$, et de leurs coefficients différentiels de tous ordres par rapport à θ, lorsque $r = a$. Si l'on substitue dans (46) les expressions de R et de Θ, le résultat ne contiendra qu'un seul terme dans lequel la différentiation par rapport à r s'élèvera au second ordre. Mais on déduit de (21), (27) et (28)

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} = -\frac{\sin\theta}{r^2}\,\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{d\psi}{d\theta}\right) + \frac{1}{\mu'}\,\frac{d\psi_2}{dt},$$

et la seconde des équations (30) donne la valeur, pour $r = a$, du

premier terme du second membre de l'équation que nous venons d'écrire. De (48) et de (30) nous tirons

$$\left(\frac{dR}{dr}\right)_a = 0,$$

$$\left(\frac{dR}{r\,d\theta}\right)_a = -\frac{\sin\theta}{a}\frac{d\xi}{dt} = \left(\frac{\Theta}{r}\right)_a,$$

$$\left(\frac{d\Theta}{dr}\right)_a = -\frac{1}{\mu' a \sin\theta}\left(\frac{d\psi_2}{dt}\right)_a.$$

Substituons dans (47), et écrivons $\mu'\rho$ au lieu de μ; nous aurons

$$F = 2\pi a \int_0^\pi \left[-a p_a \cos\theta + \rho\left(\frac{d\psi_2}{dt}\right)_a\right] \sin\theta\, d\theta.$$

Pour le premier terme de cette expression, on a, en intégrant par parties,

$$\int p \cos\theta \sin\theta\, d\theta = \frac{1}{2} p \sin^2\theta - \frac{1}{2}\int \sin^2\theta \frac{dp}{d\theta}\, d\theta.$$

Le premier terme s'annule aux limites. Mettant dans le second terme, au lieu de $\frac{dp}{d\theta}$, son expression tirée de (29) et faisant $r = a$, nous avons

$$\int_0^\pi p_a \cos\theta \sin\theta\, d\theta = -\frac{1}{2}\rho \frac{d}{dt}\int_0^\pi \left(\frac{d\psi_1}{dr}\right)_a \sin\theta\, d\theta,$$

et, reportant dans l'expression de F, nous obtenons

(49) $$F = \pi\rho a \frac{d}{dt}\int_0^\pi \left[a\left(\frac{d\psi_1}{dr}\right)_a + 2(\psi_2)_a\right] \sin\theta\, d\theta.$$

19. L'expression précédente de F, étant déduite des équations générales (27) et (28), combinées avec les équations de condition (30), est vraie, non seulement quand le fluide est confiné dans une enveloppe sphérique, mais toutes les fois que le mouvement est symétrique autour d'un axe, et cela, que le mouvement de la sphère soit ou non exprimé par une simple fonction circulaire du temps. Elle peut être employée, par exemple, dans le cas d'une sphère qui oscille dans une direction perpendiculaire à un plan fixe rigide.

Lorsque le fluide est illimité, ou emprisonné dans une enveloppe sphérique, concentrique à la sphère dans sa position d'équilibre, les fonctions ψ_1 et ψ_2 sont formées, ainsi que nous l'avons vu, de $\sin^2\theta$ multiplié par deux facteurs indépendants de θ. Si nous continuons à employer les expressions symboliques, plus commodes à manier que les expressions réelles qui en dériveraient, nous aurons, pour ces deux facteurs, respectivement

$$e^{nt\sqrt{-1}} f_1(r), \quad e^{nt\sqrt{-1}} f_2(r).$$

En les introduisant dans (49) et effectuant l'intégration par rapport à θ, nous aurons

$$(50) \qquad F = \frac{4}{3}\pi\rho a n\sqrt{-1}\,[a f_1'(a) - 2 f_2(a)]\,e^{nt\sqrt{-1}}.$$

20. Bornons-nous actuellement à considérer le cas où le fluide est illimité. Les constantes arbitraires qui s'introduiront dans les équations (38) ont été déterminées, pour ce cas, dans l'art. 16. En les substituant dans (50), nous obtenons

$$F = -\frac{2}{3}\pi\rho a^3 c n\sqrt{-1}\left(1 + \frac{9}{ma} + \frac{9}{m^2a^2}\right)e^{nt\sqrt{-1}}.$$

Mettons pour m sa valeur $\nu\left(1+\sqrt{-1}\right)$, et désignons par M' la masse du fluide déplacée par la sphère, qui est égale à $\frac{4}{3}\pi\rho a^3$: nous obtenons

$$F = -M'cn\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{9}{4\nu a}\right)\sqrt{-1} + \frac{9}{4\nu a}\left(1 + \frac{1}{\nu a}\right)\right]e^{nt\sqrt{-1}},$$

d'où

$$(51) \qquad F = -\left(\frac{1}{2} + \frac{9}{4\nu a}\right)M'\frac{d^2\xi}{dt^2} - \frac{9}{4\nu a}\left(1 + \frac{1}{\nu a}\right)M'n\frac{d\xi}{dt}.$$

$\sqrt{-1}$ ayant disparu, cette équation restera la même lorsque nous passerons des valeurs symboliques aux valeurs réelles de F et de ξ.

Soit τ la durée de l'oscillation entre deux repos consécutifs, de sorte que $n\tau = \pi$, et désignons, pour abréger, par k et k' les coefficients de M' dans (51); alors

$$(52) \qquad \nu = \sqrt{\frac{\pi}{2\mu'\tau}}, \qquad k = \frac{1}{2} + \frac{9}{4\nu a}, \qquad k' = \frac{9}{4\nu a}\left(1 + \frac{1}{\nu a}\right).$$

Le premier terme de l'expression de la force F a le même effet que si l'on accroissait l'inertie de la sphère. Pour tenir compte de ce terme, il suffira de concevoir une masse kM' réunie au centre de la sphère et ajoutant à son inertie sans ajouter à son poids. Le seul effet du second terme est de produire une diminution de l'arc d'oscillation; son effet sur la durée de l'oscillation serait, en général, tout à fait insensible, et nous devons, en fait, le négliger pour être conséquent; car le mouvement du fluide a été déterminé dans l'hypothèse que celui de la sphère ne s'éteint pas, ce qui ne peut être que si la vitesse de décroissement de l'arc d'oscillation est comparativement très faible.

Si nous formons l'équation du mouvement de la sphère en y introduisant la force F, et si nous procédons alors à l'intégration de l'équation, nous aurons dans l'intégrale une exponentielle $e^{-\delta t}$ qui multipliera la fonction circulaire, en appelant δ la moitié du coefficient de $\frac{d\xi}{dt}$ divisé par celui de $\frac{d^2\xi}{dt^2}$. Soient M la masse de la sphère, $M\gamma^2$ son moment d'inertie autour de l'axe de suspension; alors

$$nk'M'(l+a)^2 = 2\delta[M\gamma^2 + kM'(l+a)^2].$$

En tenant compte de la diminution de l'arc d'oscillation, nous pouvons mettre $l+a$ au lieu de γ. Supposons que pendant i oscillations l'arc d'oscillation diminue dans le rapport de A_o à A_i,

$$(53) \qquad \log \text{nép} \frac{A_o}{A_i} = i\tau\delta = \frac{\pi i}{2} \frac{k'M'}{M+kM'}.$$

Pour un fluide donné et une durée donnée d'oscillation, k et k' croissent tous deux à mesure que a diminue. Il résulte donc de la théorie que, plus petite est la sphère, sa densité étant supposée donnée, plus la durée de l'oscillation est influencée et plus rapidement diminue l'arc d'oscillation; l'influence de la variation du rayon de la sphère est d'ailleurs bien plus marquée sur la vitesse de décroissement de l'amplitude que sur la durée de l'oscillation.

21. Supposons maintenant le fluide confiné dans une enveloppe sphérique. Dans ce cas, nous avons à déterminer, par les quatre équations (35) et (36), les quatre constantes arbitraires

qui s'introduisent dans (38). Nous avons d'abord

$$(54)\qquad \frac{A}{a} + Ba^2 + Ce^{-ma}\left(1 + \frac{1}{ma}\right) + De^{ma}\left(1 - \frac{1}{ma}\right) = \frac{1}{2}a^2c.$$

$$(55)\qquad -\frac{A}{a} + 2Ba^2 - Ce^{-ma}\left(ma + 1 + \frac{1}{ma}\right) + De^{ma}\left(ma - 1 + \frac{1}{ma}\right) = a^2c.$$

$$(56)\qquad \frac{A}{b} + Bb^2 + Ce^{-mb}\left(1 + \frac{1}{mb}\right) + De^{mb}\left(1 - \frac{1}{mb}\right) = 0.$$

$$(57)\qquad -\frac{A}{b} + 2Bb^2 - Ce^{-mb}\left(mb + 1 + \frac{1}{mb}\right) + De^{mb}\left(mb - 1 + \frac{1}{mb}\right) = 0.$$

Désignons par a^2cK la quantité $af_1'(a) + 2f_2(a)$ que nous avons à trouver; nous tirons de (38) et de (54)

$$(58)\qquad K = 1 - \frac{3A}{a^3c}.$$

Si nous éliminons successivement B de (54) et (55), de (56) et (57), et de (54) et (56), nous obtiendrons, pour la détermination de A, C, D, trois équations qui restent les mêmes quand on remplace a et b l'un par l'autre, et que l'on change les signes de A, C et D. Par conséquent, $-$A, $-$C, $-$D sont les mêmes fonctions de b et de a que A, C, D le sont de a et de b. Il nous servira aussi, dans l'élimination ultérieure, d'observer que C et D s'échangent lorsque l'on change le signe de m. Le résultat de l'élimination est

$$(59)\qquad K = 1 - \frac{3b}{2m^2a^2}\,\frac{\eta(a, b) - \eta(b, a)}{12mab + \zeta(a, b) + \zeta(b, a)},$$

les fonctions ζ et η étant définies par les équations

$$(60)\qquad \begin{cases} \eta(a, b) = (m^2a^2 - 3ma + 3)(m^2b^2 - 3mb + 3)e^{m(b-a)}, \\ \zeta(a, b) = [b(m^2b^2 - 3mb + 3) - a(m^2a^2 - 3ma + 3)]e^{m(b-a)}. \end{cases}$$

On voit donc que K est une fonction compliquée de m et de ab [1], et que les expressions algébriques des quantités qui répondent à k et k' dans l'art. 20 seraient plus compliquées encore, parce qu'il faudrait remplacer m par $\nu(1 + \sqrt{-1})$ dans (60) et (59), et K se réduirait à la forme $-k + k'\sqrt{-1}$. Pour tirer de ces formules des résultats numériques, le mieux serait de substi-

tuer dans (60) et (59) les valeurs numériques de a, b et ν, et d'achever la réduction de K en nombre.

22. Si la distance de l'enveloppe à la surface de la sphère est très considérable, l'exponentielle $e^{\nu(b-a)}$, qui dérive de $e^{m(b-a)}$, aura une valeur numérique si considérable, que nous pourrons négliger, dans l'expression de K, les termes du numérateur et du dénominateur de la fraction qui contiennent $e^{-\nu(b-a)}$, aussi bien que le terme du dénominateur qui ne renferme pas d'exponentielle, auprès de ceux qui contiennent $e^{\nu(b-a)}$. Ainsi, si $b-a$ vaut 2 pouces, τ une seconde, et si

$$\sqrt{\mu'} = 0{,}116,$$

nous avons

$$e^{\nu(b-a)} = 242\,4000000$$

à peu près ; et si $b-a$ est seulement de 1 pouce ou de $\frac{1}{2}$ pouce, nous aurons encore la racine carrée ou la racine quatrième de cette quantité, c'est-à-dire environ 49234 ou 222, pour la valeur de l'exponentielle. Dans la pratique donc, la simplification précédente est possible, ce qui fait disparaître les exponentielles de l'expression de K. Nous obtenons ainsi

$$(61)\quad K = 1 - \frac{3b}{2m^2a^2}\,\frac{(m^2a^2+3ma+3)(m^2b^2-3mb+3)}{b(m^2b^2-3mb+3)-a(m^2a^2+3ma+3)}.$$

Si nous prenons

$$\begin{gathered}
3\nu a + 3 + (2\nu^2a^2+3\nu a)\sqrt{-1} = \mathrm{A}'(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha),\\
-3\nu b + 3 + (2\nu^2b^2-3\nu b)\sqrt{-1} = \mathrm{B}'(\cos\beta+\sqrt{-1}\sin\beta),\\
b\mathrm{B}'\cos\beta - a\mathrm{A}'\cos\alpha = \mathrm{C}'\cos\gamma,\\
b\mathrm{B}'\sin\beta - a\mathrm{A}'\sin\alpha = \mathrm{C}'\sin\gamma,
\end{gathered}$$

nous déduirons, de (61),

$$K = 1 + \frac{3b\sqrt{-1}}{4\nu^2a^2}\,\frac{\mathrm{A}'\mathrm{B}'}{\mathrm{C}'}\left[\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\sqrt{-1}\sin(\alpha+\beta-\gamma)\right],$$

d'où

$$(62)\quad \left\{\begin{aligned}
k &= \frac{3b\mathrm{A}'\mathrm{B}'}{4\nu^2a^2\mathrm{C}'}\sin(\alpha+\beta-\gamma)-1,\\
k' &= \frac{3b\mathrm{A}'\mathrm{B}'}{4\nu^2a^2\mathrm{C}'}\cos(\alpha+\beta-\gamma):
\end{aligned}\right.$$

et, comme précédemment, kM' est la masse imaginaire que nous devons concevoir réunie au centre de la sphère, pour tenir compte de l'inertie du fluide, et $-k'M'n\frac{d\xi}{dt}$ le terme de F dont dépend la diminution de l'arc d'oscillation.

23. Si nous supposons $\mu' = 0$ et, par suite, $m = \infty$, nous tirons de (61)

$$K = -\frac{b^3 + 2a^3}{2(b^3 - a^3)}, \tag{63}$$

et, dans ce cas, k est le même que avec K changé de signe, et k' est nul ; ce qui concorde avec le résultat que l'on déduit directement des équations ordinaires de l'Hydrodynamique (1). Si, d'autre part, nous faisons $b = \infty$, nous arrivons aux résultats déjà obtenus dans l'art. 20. Dans ces deux cas, il devient rigoureusement exact de négliger, dans l'expression de $K - 1$, donnée par (59), tous les termes qui ne sont pas multipliés par $e^{\nu(b-a)}$.

Si l'influence de l'enveloppe est seulement petite, ce qui sera généralement le cas, il conviendra de calculer k et k' d'après les formules (52), qui s'appliquent au cas où $b = \infty$, et d'ajouter ensuite les corrections Δk, $\Delta k'$, dues à l'enveloppe. Nous déduisons, de (61),

$$\Delta k - \Delta k'\sqrt{-1} = \frac{3}{2m^2 a}\,\frac{(m^2a^2 + 3ma + 3)^2}{b(m^2b^2 - 3mb + 3) - a(m^2a^2 + 3ma + 3)}, \tag{64}$$

que l'on peut traiter, au besoin, comme on a traité (61) dans l'Article précédent. Si cependant nous supposons m considérable, et si nous nous contentons de conserver seulement le terme le plus important de (64), nous avons simplement

$$\Delta k = \frac{3a^3}{2(b^3 - a^3)}, \qquad \Delta k' = 0, \tag{65}$$

de sorte que la correction due à l'enveloppe peut se calculer comme si le fluide était dénué de frottement.

(1) *Voir* les *Trans. phil. de Cambridge*, vol. VIII, p. 120.

Section III.

Résolution des équations dans le cas d'un cylindre infini oscillant dans une masse de fluide illimitée, dans une direction perpendiculaire à son axe.

24. Supposons une longue tige cylindrique suspendue par un point de son axe, et mise en oscillation comme un pendule dans une masse illimitée de fluide. La résistance éprouvée par un élément quelconque du cylindre compris entre deux plans parallèles menés perpendiculairement à l'axe sera manifestement à très peu près la même que si l'élément appartenait à un cylindre indéfini oscillant avec la même vitesse angulaire. Pour un élément situé très près de l'une ou l'autre extrémité de la tige, la résistance ainsi déterminée serait sans doute sensiblement erronée ; mais, comme le diamètre de la tige est supposé petit en comparaison de sa longueur, on verra aisément que l'erreur ainsi introduite ne peut être qu'extrêmement faible.

Imaginons donc un cylindre indéfini oscillant dans un fluide, dans une direction perpendiculaire à son axe, de façon que le mouvement ait lieu dans deux dimensions, et proposons-nous de déterminer le mouvement du fluide. Le mode de solution de ce problème n'a pas besoin d'explication ; car il est identique en principe avec celui qui a déjà été adopté dans le cas d'une sphère. Dans le cas présent, le problème se montre un peu plus facile, jusqu'à la formation des équations analogues à (33) et (34), après quoi, il devient beaucoup plus difficile.

25. Prenons pour plan des xy un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre, l'origine étant sur l'axe du cylindre dans sa position moyenne, et l'axe des x étant dirigé suivant le mouvement du cylindre. Les équations générales (2) et (3) deviennent, dans ce cas,

$$(66)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= \mu\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}\right)-\rho\frac{du}{dt},\\ \frac{dp}{dy} &= \mu\left(\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}\right)-\rho\frac{dv}{dt},\end{aligned}\right.$$

$$(67)\qquad \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}=0.$$

En vertu de (67), $u\,dy - v\,dx$ est une différentielle exacte. Posons donc

$$(68)\qquad u\,dy - v\,dx = d\chi.$$

Si nous éliminons p, par différentiation, des deux équations (66), et si nous exprimons u et v en fonction de χ dans l'équation résultante, nous obtenons

$$(69)\qquad \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} - \frac{1}{\mu'}\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}\right)\chi = 0$$

et, comme précédemment,

$$(70)\qquad \chi = \chi_1 + \chi_2,$$

où

$$(71)\qquad \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}\right)\chi_1 = 0,$$

$$(72)\qquad \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} - \frac{1}{\mu'}\frac{d}{dt}\right)\chi_2 = 0.$$

De (66) et (68) on tire

$$\begin{aligned} dp = {} & \mu'\rho\,dx\,\frac{d}{dy}\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} - \frac{1}{\mu'}\frac{d}{dt}\right)\chi \\ & - \mu'\rho\,dy\,\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} - \frac{1}{\mu'}\frac{d}{dt}\right)\chi, \end{aligned}$$

ce qui devient, au moyen de (70), (71) et (72),

$$(73)\qquad dp = \rho\left(\frac{d^2\chi_1}{dt\,dx}\,dy - \frac{d^2\chi_1}{dt\,dy}\,dx\right).$$

26. Passons aux coordonnées polaires, r et θ, où θ est supposé mesuré à partir de l'axe des x ; les équations (68), (71), (72) et (73) nous donnent

$$(74)\qquad R\,r\,d\theta - \Theta\,dr = d\chi,$$

$$(75)\qquad \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\right)\chi_1 = 0,$$

$$(76)\qquad \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2} - \frac{1}{\mu'}\frac{d}{dt}\right)\chi_2 = 0,$$

$$(77)\qquad dp = \rho\,\frac{d}{dt}\left(\frac{d\chi_1}{dr}\,r\,d\theta - \frac{d\chi_1}{r\,d\theta}\,dr\right).$$

R et Θ dans (74) sont les composantes des vitesses suivant le rayon vecteur et perpendiculairement à ce rayon.

27. Soit a le rayon du cylindre ; et soit, comme précédemment, le mouvement du cylindre défini par l'équation

$$(78) \qquad \frac{d\xi}{dt} = ce^{nt\sqrt{-1}} = ce^{\mu' m^2 t};$$

nous avons alors, pour les équations de condition relatives à la surface du cylindre,

$$(79) \qquad \left\{\begin{aligned} R &= \frac{d\chi}{r\,d\theta} = \cos\theta\,\frac{d\xi}{dt} = c\cos\theta\, e^{\mu' m^2 t}, \\ \Theta &= -\frac{d\chi}{dr} = -\sin\theta\,\frac{d\xi}{dt} = -c\sin\theta\, e^{\mu' m^2 t}, \end{aligned}\right\} \text{ pour } r = a.$$

Les équations générales (75) et (76), aussi bien que les équations de condition (79), sont satisfaites si l'on prend

$$(80) \qquad \chi_1 = e^{\mu' m^2 t}\sin\theta\, F_1(r), \qquad \chi_2 = e^{\mu' m^2 t}\sin\theta\, F_2(r).$$

La substitution de ces valeurs dans (75), (76) et (79) nous donne

$$(81) \qquad F_1''(r) + \frac{1}{r}F_1'(r) - \frac{1}{r^2}F_1(r) = 0,$$

$$(82) \qquad F_2''(r) + \frac{1}{r}F_2'(r) - \frac{1}{r^2}F_2(r) - m^2 F_2(r) = 0,$$

$$(83) \qquad F_1(a) + F_2(a) = ac, \qquad F_1'(a) + F_2'(a) = c.$$

Nous avons, en outre, la condition que la vitesse s'annule à une distance infinie.

28. L'intégrale de (81) est

$$(84) \qquad F_1(r) = \frac{A}{r} + Br.$$

Celle de (82) ne peut s'obtenir en termes finis.

Pour simplifier cette dernière équation, prenons $F_2(r) = F_3'(r)$. Mettant cette valeur dans (82) et intégrant une fois, on obtient

$$(85) \qquad F_3''(r) + \frac{1}{r}F_3'(r) - m^2 F_3(r) = 0.$$

Il est inutile d'ajouter une constante arbitraire, puisqu'une pareille constante, si on l'introduisait, disparaîtrait en écrivant $F_1(r) - C$ au lieu de $F_1(r)$.

Pour intégrer (85) par série ordonnée suivant les puissances ascendantes de r, prenons d'abord, au lieu de (85), l'équation qui s'en déduit en multipliant le second terme par $1 - \delta$. Si l'on fait, dans cette nouvelle équation, $F_3(r) = A_{,} r^{\alpha} + B_{,} r^{\beta} + \ldots$, et si l'on détermine les exposants arbitraires α, β, ... et les constantes arbitraires $A_{,}$, $B_{,}$, ... de manière à satisfaire à l'équation, on obtient

$$\begin{aligned}
F_3(r) &= A_{,}\left[1 + \frac{m^2 r^2}{2(2-\delta)} + \frac{m^4 r^4}{2.4(2-\delta)(4-\delta)} + \ldots\right] \\
&\quad + A_{\prime\prime} r^{\delta}\left[1 + \frac{m^2 r^2}{2(2+\delta)} + \frac{m^4 r^4}{2.4(2+\delta)(4+\delta)} + \ldots\right] \\
&= (A_{,} + A_{\prime\prime} + A_{\prime\prime}\delta \log r)\left(1 + \frac{m^2 r^2}{2^2} + \frac{m^4 r^4}{2^2.4^2} + \ldots\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}(A_{,} - A_{\prime\prime})\delta\left(\frac{m^2 r^2}{2^2} S_1 + \frac{m^4 r^4}{2^2.4^2} S_2 + \frac{m^6 r^6}{2^2.4^2.6^2} S_3 + \ldots\right) \\
&\quad + \text{des termes en } \delta^2, \delta^3, \ldots.
\end{aligned}$$

Dans cette expression

(86) $$S_i = 1^{-1} + 2^{-1} + 3^{-1} + \ldots + i^{-1}.$$

Si nous posons maintenant

$$A_{,} = C - A_{\prime\prime}, \qquad A_{\prime\prime} = D\delta^{-1}$$

et si nous substituons ces valeurs dans l'équation précédente, puis que nous fassions $\delta = 0$, nous aurons

(87) $$\left\{\begin{aligned}
F_3(r) &= (C + D \log r)\left(1 + \frac{m^2 r^2}{2^2} + \frac{m^4 r^4}{2^2.4^2} + \ldots\right) \\
&\quad - D\left(\frac{m^2 r^2}{2^2} S_1 + \frac{m^4 r^4}{2^2.4^2} S_2 + \frac{m^6 r^6}{2^2.4^2.6^2} S_3 + \ldots\right).
\end{aligned}\right.$$

Les séries comprises dans cette équation sont évidemment convergentes pour toute valeur de r, quelque grande qu'elle soit ; mais, néanmoins, elles ne nous renseignent en rien sur ce que devient $F_3(r)$ quand r devient infini, et il faut encore déterminer une relation entre C et D par la condition que $F_3(r)$ ne devient pas infini en même temps que r.

L'équation (85) peut s'intégrer au moyen de séries descendantes combinées avec des exponentielles, en posant

$$F_3(r) = e^{-mr}(A_1 r^\alpha + B_1 r^\beta + \ldots).$$

J'ai déjà donné l'intégrale sous cette forme dans un Mémoire *Sur le calcul numérique d'une classe d'intégrales définies et de séries infinies* [1]. Voici le résultat :

$$(88)\quad \left\{\begin{aligned} F_3(r) &= C' e^{-mr} r^{-\frac{1}{2}}\left[1 - \frac{1^2}{2(4mr)} + \frac{1^2.3^2}{2.4(4mr)^2} - \frac{1^2.3^2.5^2}{2.4.6(4mr)^3} + \ldots\right]\\ &+ D' e^{mr} r^{-\frac{1}{2}}\left[1 + \frac{1^2}{2(4mr)} + \frac{1^2.3^2}{2.4(4mr)^2} + \frac{1^2.3^2.5^2}{2.4.6(4mr)^3} + \ldots\right].\end{aligned}\right.$$

Ces séries, bien que divergentes, en définitive, dans tous les cas, sont très convenables pour le calcul lorsque le module de mr est grand. Bien plus, elles donnent à la fois $D' = 0$, à la condition que $F_3(r)$ ne devienne pas infini en même temps que r, et, par suite, nous sommes en état d'obtenir la relation cherchée entre C et D, pourvu que nous puissions exprimer D′ en fonction de C et de D.

29. C'est ce qui peut se faire à l'aide de l'intégrale de (85) exprimée par des intégrales définies. Cette forme de l'intégrale est déjà connue. Elle devient, par une légère transformation,

$$(89)\quad F_3(r) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [C'' + D'' \log(r \sin^2 \omega)] (e^{mr\cos\omega} + e^{-mr\cos\omega})\, d\omega,$$

C″ et D″ étant les deux constantes arbitraires. Si, dans (89), nous développons les deux exponentielles et si nous intégrons les termes séparément, nous obtenons, en fait, une expression de la même forme que (87). Cette transformation exige la réduction de l'intégrale définie

$$P_i = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2i}\omega \log \sin\omega\, d\omega.$$

Si nous intégrons par parties, intégrant $\cos\omega \log\sin\omega\, d\omega$, et

[1] *Trans. Phil. de Cambridge*, vol. IX, p. 182.

différentiant $\cos^{2i-1}\omega$, nous ferons dépendre P_i de P_{i-1}. Prenons $P_0 = Q_0$, $P_1 = \frac{1}{2}Q_1$, ... et, généralement,

$$P_i = \frac{1.3.\dots(2i-1)}{2.4\dots 2i} Q_i,$$

il vient

$$Q_i = Q_0 - [2^{-1} + 4^{-1} + \dots + (2i)^{-1}]\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{4} S_i \ (^1).$$

L'équivalence des expressions (87) et (89) étant démontrée, pour trouver les relations entre C, D et C″, D″, il suffit d'écrire l'un après l'autre les deux termes généraux de (87) et de (89) et d'égaler les résultats. Nous avons ainsi

$$C + D\log r = \pi C'' + \pi D''\log r + 2\pi D''\log\left(\tfrac{1}{2}\right),$$

d'où

$$(90) \qquad C = \pi C'' + 2\pi\log\left(\tfrac{1}{2}\right) D'', \qquad D = \pi D''.$$

Il reste alors à faire le pas le plus difficile, qui est de trouver la relation entre D′ et C″ et D″. Dans ce but, cherchons la valeur limite du second membre de l'équation (89), lorsque r croît indéfiniment. En premier lieu, on peut remarquer que, si Ω, Ω' sont deux quantités imaginaires, ayant leurs parties réelles positives, si la partie réelle de Ω est plus grande que celle de Ω', et si l'on suppose que r croît indéfiniment, $e^{\Omega r}$ sera à la limite incomparablement plus grand que $e^{\Omega' r}$, ou même que $e^{\Omega' r}\log r$ ou, en termes plus précis, le module de la première expression sera à la limite incomparablement plus grand que le module de l'une ou l'autre des deux dernières. Par conséquent, pour trouver la valeur limite de l'expression de $F_3(r)$ dans (89), on peut remplacer les limites o et $\frac{1}{2}\pi$ de ω par o et ω_1, ω_1 étant une quantité positive aussi petite que l'on voudra, qu'on pourra supposer s'annuler après que r est

(¹) On trouvera dans le IIᵉ Volume du *Mathematical Journal de Cambridge*, p. 282, ou dans les *Exemples de Gregory*, p. 484, une démonstration par M. Ellis du théorème dû à Euler :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2}\log\left(\tfrac{1}{2}\right).$$

devenu infini. On peut donc, pour la même raison, négliger la seconde des exponentielles. Soit $\cos\omega = 1 - \lambda$, de sorte que

$$\sin^2\omega = 2\lambda\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right), \qquad d\omega = \frac{d\lambda}{\sqrt{2\lambda - \lambda^2}} = \left(1 + \frac{\lambda}{4} + \ldots\right)\frac{d\lambda}{\sqrt{2\lambda}};$$

alors les limites de λ seront o et λ_1, λ_1 étant égal à $1 - \cos\omega_1$. Puisque $\log\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)$ s'évanouit à la limite, et que $1 + \frac{\lambda}{4} + \ldots$ devient 1 à la limite, on tire de (89)

$$\text{limite de } F_3(r) = e^{mr} \times \text{limite de} \int_0^{\lambda_1} (C'' + D'' \log 2\lambda r)\, e^{-m\lambda r} \frac{d\lambda}{\sqrt{2\lambda}} \text{ (1)}.$$

Si maintenant nous posons $\lambda = \lambda' r^{-1}$, nous aurons o et $\lambda_1 r$ pour les limites de λ', et la seconde de celle-ci devient infinie avec r. Par conséquent

(91) $$\text{limite de } F_3(r) = (2r)^{-\frac{1}{2}} e^{mr} \int_0^{\infty} (C'' + D'' \log 2\lambda')\, e^{-m\lambda'} \lambda'^{-\frac{1}{2}}\, d\lambda'.$$

Or $\int_0^{\infty} e^{-x} x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \pi^{\frac{1}{2}}$, et, si nous différentions les deux membres de l'équation

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1}\, dx = \Gamma(s)$$

par rapport à s, et que, après la différentiation, nous fassions $s = \frac{1}{2}$, nous avons

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} \log x\, dx = \Gamma'\left(\tfrac{1}{2}\right).$$

Faisons dans ces équations $x = m\lambda'$; il nous vient

$$\int_0^{\infty} e^{-m\lambda'} \lambda'^{-\frac{1}{2}}\, d\lambda' = \pi^{\frac{1}{2}} m^{-\frac{1}{2}}, \qquad \int_0^{\infty} e^{-m\lambda'} \lambda'^{-\frac{1}{2}} \log\lambda'\, d\lambda' = m^{-\frac{1}{2}}\left[\Gamma'\left(\tfrac{1}{2}\right) - \pi^{\frac{1}{2}} \log m\right],$$

---

(1) Le terme *limite* est employé ici dans ce sens que $f(r)$ peut être appelé la limite de $\varphi(r)$ lorsque le rapport de $\varphi(r)$ à $f(r)$ est finalement un rapport d'égalité, quoique $f(r)$ et $\varphi(r)$ puissent s'annuler ou devenir infinis à la fois, dans lequel cas la limite de $\varphi(r)$, au sens usuel du mot *limite*, serait zéro ou l'infini.

où il faut prendre la valeur de $m^{\frac{1}{2}}$ qui a sa partie réelle positive. En substituant dans (91), nous obtenons

$$\text{limite de } F_3(r) = \left(\frac{\pi}{2mr}\right)^{\frac{1}{2}} e^{mr}\left[C'' + \left(\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma'(\tfrac{1}{2}) - \log\frac{m}{2}\right)D''\right],$$

dont la comparaison avec (88) nous donne

$$(92) \qquad D' = \left(\frac{\pi}{2m}\right)^{\frac{1}{2}}\left[C'' + \left(\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma'(\tfrac{1}{2}) - \log\frac{m}{2}\right)D''\right].$$

30. Nous sommes maintenant en état de trouver la relation entre C et D qui résulte de la condition que le mouvement du fluide ne doit pas devenir infini à une distance infinie du cylindre. La détermination des constantes arbitraires A, B, C, D ne présentera plus désormais de difficultés. Nous devons avoir $B = 0$, car autrement la vitesse serait finie à une distance infinie, et dès lors les deux équations (83), combinées avec la relation qui vient d'être mentionnée, serviront à déterminer A, C et D. Le mouvement du fluide sera ainsi complètement déterminé, les fonctions $F_1(r)$ et $F_3(r)$ étant données par (84) et (87). Si le module de mr est grand, les séries de (87), bien que convergentes hypergéométriquement à la limite, sont d'abord rapidement divergentes; et, en pareil cas, il serait beaucoup plus convenable d'employer l'équation (88) au calcul de la valeur numérique de $F_3(r)$. L'emploi de cette équation à cet usage nécessiterait la détermination préalable de la constante C'. On trouvera cependant que, pour calculer la pression résultante du fluide sur le cylindre, détermination qui est l'unique but de notre recherche, il n'est pas nécessaire de connaître la valeur de C', même si l'on fait usage de l'équation (88).

Faisons $D' = 0$ dans (92) et éliminons C'' et D'' entre l'équation résultante et les deux équations (90), nous aurons

$$(93) \qquad C = \left(\log\frac{m}{8} - \pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma'\frac{1}{2}\right)D.$$

Et, si nous observons que $F_2(r) = F'_3(r)$ et que $B = 0$, les équations (83) et (86) nous donnent

$$(94) \qquad \frac{A}{a} + F'_3(a) = ac, \qquad -\frac{A}{a} + aF''_3(a) = ac;$$

d'où

$$(95) \qquad \frac{a^2c+\mathrm{A}}{a^2c-\mathrm{A}} = -\frac{a\,\mathrm{F}''_3(a)}{\mathrm{F}'_3(a)}.$$

Cette équation détermine A, parce que, si l'on tire $\mathrm{F}_3(a)$ de (87), le second membre de (95) ne contiendra que le rapport de C à D, qui est donné par (93), et, si l'on déduit $\mathrm{F}_3(a)$ de (88), C' disparaît, puisque $\mathrm{D}' = 0$.

31. Formons maintenant l'expression de la résultante des forces que le fluide exerce sur le cylindre. Soit F la résultante des pressions qui agissent sur une longueur dl du cylindre; ce sera évidemment une force agissant dans la direction de l'axe des x. Alors, par la même voie qui nous a donné l'expression (47), nous aurons

$$(96) \qquad F = a\,dl\int_0^{2\pi}(-P_r\cos\theta + T_\theta\sin\theta)_a\,d\theta.$$

où P_r et T_θ sont donnés, en fonction de R et de Θ, par les mêmes formules (46) que précédemment. Si les seconds membres de ces équations sont exprimés en fonction de χ, il n'y aura qu'un seul terme dans lequel la différentiation par rapport à r s'élèvera au second ordre, et les équations (70), (75) et (76) nous donneront

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} = -\frac{1}{r}\frac{d\chi}{dr} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2\chi}{d\theta^2} + \frac{1}{\mu'}\frac{d\chi_2}{dt}.$$

De cette équation et des équations de condition (79), nous tirons

$$\left(\frac{dR}{dr}\right)_a = \frac{1}{a}\left(\frac{d\chi}{d\theta}\right)_a = \frac{1}{a^2}\left(\frac{d^2\chi}{dr\,d\theta}\right)_a = 0,$$

$$\left(\frac{dR}{r\,d\theta}\right)_a = \frac{1}{a^2}\left(\frac{d^2\chi}{d\theta^2}\right)_a = -\frac{\sin\theta}{a}\frac{d\xi}{dt} = \frac{\Theta}{a},$$

$$\left(\frac{d\Theta}{dr}\right)_a = -\left(\frac{d^2\chi}{dr^2}\right)_a = \frac{1}{a}\left(\frac{d\chi}{dr}\right)_a + \frac{1}{a^2}\left(\frac{d^2\chi}{d\theta^2}\right)_a - \frac{1}{\mu'}\left(\frac{d\chi_2}{dt}\right)_a = -\frac{1}{\mu'}\left(\frac{d\chi_2}{dt}\right)_a.$$

De là

$$(97) \qquad F = a\,dl\int_0^{2\pi}\left[-p_a\cos\theta + \rho\left(\frac{d\chi_2}{dt}\right)_a\sin\theta\right]d\theta.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\int p_a \cos\theta\, d\theta = p_a \sin\theta - \int \left(\frac{dp}{d\theta}\right)_a \sin\theta\, d\theta.$$

Le premier terme s'annule aux deux limites, et, en mettant pour $\frac{dp}{d\theta}$ sa valeur donnée par (77), puis, substituant dans (97), nous avons

$$F = \rho a\, dl \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} \left[a \left(\frac{d\psi_1}{dr}\right)_a + (\psi_2)_a \right] \sin\theta\, d\theta,$$

ou bien

$$F = \pi\rho a\, dl . n\sqrt{-1}\,[a\,\mathrm{F}'_1(a) - \mathrm{F}'_3(a)]\,e^{nt\sqrt{-1}}.$$

Si l'on observe que, d'après (83),

$$\mathrm{F}'_3(a) \text{ ou } \mathrm{F}_2(a) = ac - \mathrm{F}_1(a),$$

et que $\mathrm{F}_1(a) = \mathrm{A}a^{-1}$, où A est donné par (95), et si l'on remplace $\pi\rho a^2\, dl$, masse du fluide déplacé, par M', on a

$$F = M'cn\sqrt{-1}\left[1 - 2\,\frac{a\,\mathrm{F}'_3(a) - \mathrm{F}'_3(a)}{a\,\mathrm{F}'_3(a) + \mathrm{F}'_3(a)}\right] e^{nt\sqrt{-1}},$$

ce qui devient, en vertu de l'équation différentielle (85) à laquelle F_3 satisfait

(98) $$F = -M'cn\sqrt{-1}\left[1 - \frac{4\,\mathrm{F}'_3(a)}{m^2 a\,\mathrm{F}_3(a)}\right] e^{nt\sqrt{-1}}.$$

Posons

(99) $$1 - \frac{4\,\mathrm{F}'_3(a)}{m^2 a\,\mathrm{F}_3(a)} = k - k'\sqrt{-1},$$

où k et k' sont réels, alors, comme précédemment, $k\,M'\frac{d^2\xi}{dt^2}$ sera la partie de F qui altère la durée de l'oscillation, et $k'\,M'n\frac{d\xi}{dt}$ celle qui produit la diminution d'amplitude de l'oscillation.

Lorsque μ' s'annule, m devient infini ; et, en nous rappelant que $\mathrm{D}' = 0$, nous déduisons de (88) et (90), $k = 1$, $k' = 0$, résultat qui découle directement et très simplement des équations ordinaires de l'Hydrodynamique [1].

---

[1] Voir les *Trans. Phil. de Cambridge*, t. VIII, p. 116.

32. Tout se réduit maintenant au calcul numérique des quantités k et k', dont les expressions analytiques sont connues. Les séries (87) étant toujours convergentes pourraient être employées dans tous les cas; mais, si le module de ma est grand, il sera mieux d'employer une série procédant suivant les puissances décroissantes de a. Considérons d'abord les séries ascendantes.

Soit $2\mathfrak{m}$ le module de ma; alors

$$(100)\qquad ma = 2\mathfrak{m}\, e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}, \qquad \mathfrak{m} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{n}{\mu'}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\mu'\tau}},$$

τ étant, comme précédemment, la durée de l'oscillation entre deux repos consécutifs. Si nous substituons, dans (99), l'expression précédente de ma, nous aurons

$$(101)\qquad k - k'\sqrt{-1} = 1 + \frac{\sqrt{-1}\, a\, F'_3(a)}{\mathfrak{m}^2\, F_3(a)}.$$

Posons, pour abréger,

$$(102)\qquad \text{log nép.}\, 4 + \pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma'(\tfrac{1}{2}) = -\Lambda;$$

nous tirons, de (87) et de (93),

$$\frac{1}{D}F_3(a) = \left(\log\mathfrak{m} + \Lambda + \frac{\pi}{4}\sqrt{-1}\right)\left(1 + \frac{\mathfrak{m}^2}{1^2}\sqrt{-1} - \frac{\mathfrak{m}^4}{1^2.2^2} - \frac{\mathfrak{m}^6}{1^2.2^2.3^2}\sqrt{-1} + \ldots\right)$$
$$- \left(\frac{\mathfrak{m}^2}{1^2}S_1\sqrt{-1} - \frac{\mathfrak{m}^4}{1^2.2^2}S_2 - \frac{\mathfrak{m}^6}{1^2.2^2.3^2}S_3\sqrt{-1} + \ldots\right),$$

$$\frac{1}{D}a\,F'_3(a) = 1 + \frac{\mathfrak{m}^2}{1^2}\sqrt{-1} - \frac{\mathfrak{m}^4}{1^2.2^2} - \ldots + 2\left(\log\mathfrak{m} + \Lambda + \frac{\pi}{4}\sqrt{-1}\right)\left(\frac{\mathfrak{m}^2}{1}\sqrt{-1} - \frac{\mathfrak{m}^4}{1^2.2} - \ldots\right)$$
$$- 2\left(\frac{\mathfrak{m}^2}{1}S_1\sqrt{-1} - \frac{\mathfrak{m}^4}{1^2.2}S_2 - \frac{\mathfrak{m}^6}{1^2.2^2.3}S_3\sqrt{-1} + \ldots\right).$$

Soit

$$(103)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\mathfrak{m}^2}{1} - \frac{\mathfrak{m}^6}{1^2.2^2.3} + \ldots = M_0, &\quad& \frac{\mathfrak{m}^4}{1^2.2} - \frac{\mathfrak{m}^8}{1^2.2^2.3^2.4} + \ldots = M_e,\\
&\frac{\mathfrak{m}^2}{1^2} - \frac{\mathfrak{m}^6}{1^2.2^2.3^2} + \ldots = M'_0, && \frac{\mathfrak{m}^4}{1^2.2^2} - \frac{\mathfrak{m}^8}{1^2.2^2.3^2.4^2} + \ldots = M'_e,\\
&\frac{\mathfrak{m}^2}{1}S_1 - \frac{\mathfrak{m}^6}{1^2.2^2.3}S_2 + \ldots = N_0, && \frac{\mathfrak{m}^4}{1^2.2}S_2 - \frac{\mathfrak{m}^8}{1^2.2^2.3^2.4}S_4 + \ldots = N_e,\\
&\frac{\mathfrak{m}^2}{1^2}S_1 - \frac{\mathfrak{m}^6}{1^2.2^2.3^2}S_3 + \ldots = N'_0, && \frac{\mathfrak{m}^4}{1^2.2^2}S_2 - \frac{\mathfrak{m}^8}{1^2.2^2.3^2.4^2}S_4 + \ldots = N'_e;
\end{aligned}\right.$$

$$(104)\qquad \text{log nép.}\,\mathfrak{m} + \Lambda = L.$$

En substituant ces valeurs dans (101), changeant le signe de $\sqrt{-1}$, et ordonnant les termes, on obtient

$$(105)\quad \left\{\begin{aligned} k &+ k'\sqrt{-1} \\ &= 1 + \frac{2}{\mathfrak{m}^2}\,\frac{-\,\mathrm{LM}_0 + \frac{\pi}{4}\mathrm{M}_e - \frac{1}{2}\mathrm{M}'_0 + \mathrm{N}_0 + \left[\frac{\pi}{4}\mathrm{M}_0 + \mathrm{LM}_e - \frac{1}{2}(1-\mathrm{M}'_e) - \mathrm{N}_e\right]\sqrt{-1}}{\frac{\pi}{4}\mathrm{M}'_0 + \mathrm{L}(1-\mathrm{M}'_e) + \mathrm{N}'_e + \left[\mathrm{LM}'_0 - \frac{\pi}{4}(1-\mathrm{M}'_e) - \mathrm{N}'_0\right]\sqrt{-1}}.\end{aligned}\right.$$

33. Avant de poursuivre le calcul, il est nécessaire de connaître la valeur numérique de la transcendante A. Or

$$\begin{aligned}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma'(\tfrac{1}{2}) &= [\Gamma(\tfrac{1}{2})]^{-1}\Gamma'(\tfrac{1}{2}) \\ &= \frac{d}{ds}\log\Gamma(s) = \frac{d}{ds}\log\Gamma(1+s) - \frac{1}{s}, \qquad \text{pour } s = \tfrac{1}{2},\end{aligned}$$

et la valeur de $\frac{d}{ds}\log\Gamma(1+s)$ peut se prendre dans la Table de Legendre des logarithmes ordinaires de $\Gamma(1+s)$, dans laquelle l'intervalle s est 0,001. Représentons par l_s le nombre tabulaire correspondant à s ; nous avons

$$\frac{d}{ds}\log\Gamma(1+s) = 1000\ \text{lognép.}\,10\left(\Delta l_s - \tfrac{1}{2}\Delta^2 l_s + \tfrac{1}{3}\Delta^3 l_s - \tfrac{1}{4}\Delta^4 l_s + \ldots\right).$$

Pour $s = \frac{1}{2}$,

$$\Delta l_s = +16050324, \qquad \Delta^2 l_s = +405620, \qquad \Delta^3 l_s = -359, \qquad \Delta^4 l_s = +6\ (^1);$$

dans chacun de ces nombres, la dernière figure occupe le douzième rang des décimales. On obtient ainsi

$$(106)\qquad \pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma'(\tfrac{1}{2}) = -1,9635102, \qquad \mathrm{A} = +0,5772158.$$

34. Lorsque $\mathfrak{m}$ est grand, il vaut mieux employer des séries ordonnées suivant les puissances décroissantes de a. Si nous observons que le terme général de $\mathrm{F}_3(a)$, tel qu'il est donné par (88), en y faisant $\mathrm{D}' = 0$, a pour expression

$$(-1)^i \mathrm{C}' e^{-ma}\frac{[1.3\ldots(2i-1)]^2}{2.4\ldots 2i(4ma)^i a^{\frac{1}{2}}},$$

(1) Ces nombres sont copiés dans le *Traité de Calcul différentiel et intégral* de de Morgan, p. 588.

nous obtenons, pour le terme général de $F'_3(a)$,

$$(-1)^{i-1}C'e^{-ma}\frac{[1.3\ldots(2i-3)]^2}{2.4\ldots(2i-2)(4ma)^{i-1}a^{\frac{1}{2}}}\left[m\frac{(2i-1)^2}{2i.4ma}-\frac{2i-1}{2a}\right],$$

et l'expression entre crochets est équivalente à

$$-\frac{(2i-1)(2i+1)}{8ia},$$

d'où

$$a\,F'_3(a)=C'e^{-ma}\,ma^{\frac{1}{2}}\left[-1-\frac{1.3}{2.4ma}+\frac{1^2.3.5}{2.4(4ma)^2}-\ldots\right],$$

et la division des deux expressions nous donne

$$\frac{a\,F'_3(a)}{F_3(a)}=-ma-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{8}(ma)^{-1}-\ldots.$$

35. Lorsqu'on a besoin de plusieurs termes, on peut faciliter le calcul des coefficients de la manière suivante.

En posant

$$a\,F'_3(a)=\vartheta(a)\,F_3(a),$$

on a

$$F'_3(a)=a^{-1}\vartheta(a)\,F_3(a),$$

$$F''_3(a)=[a^{-1}\vartheta'(a)-a^{-2}\vartheta(a)+a^{-2}(\vartheta a)^2]\,F_3(a).$$

En substituant dans l'équation différentielle (85), à laquelle F_3 doit satisfaire, nous obtenons

$$(107)\qquad a\vartheta'(a)+[\vartheta(a)]^2-m^2a^2=0.$$

Posons

$$(108)\qquad \vartheta(a)=-ma+A_0+A_1(ma)^{-1}+A_2(ma)^{-2}+\ldots,$$

et substituons cette valeur dans l'équation précédente, nous aurons

$$\begin{aligned}&-ma-1A_1(ma)^{-1}-2A_2(ma)^{-2}-3A_3(ma)^{-3}-\ldots\\&+[-2ma+A_0+A_1(ma)^{-1}+\ldots][A_0+A_1(ma)^{-1}+\ldots]=0,\end{aligned}$$

ce qui donne, en égalant les coefficients, $A_0=-\frac{1}{2}$, et pour $i>0$,

$$2A_{i+1}=-iA_i+A_0A_i+A_1A_{i-1}+\ldots+A_iA_0;$$

ou en écrivant, pour éviter les fractions,

$$(109)\qquad A_i=2^{-2i-1}B_i,$$

$$(110)\qquad B_{i+1}=-2iB_i+B_0B_i+B_1B_{i-1}+\ldots+B_iB_0,$$

formule au moyen de laquelle on peut aisément calculer les coefficients B_1, B_2, B_3, ... l'un après l'autre. On obtient ainsi

$$(111)\quad \left\{\begin{array}{lll} B_0 = 1, & B_1 = 1, & B_2 = 4, \\ B_3 = 25, & B_4 = -208, & B_5 = 2146, \\ B_6 = 26368, & B_7 = 375733, & B_8 = 6092032. \end{array}\right.$$

On tire maintenant de (100), (101), (108) et (109),

$$(112)\quad \left\{\begin{array}{l} k + k'\sqrt{-1} = 1 + 2e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}\,\mathfrak{m}^{-1} \\ \qquad\qquad - \frac{1}{2}B_0 e^{2\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}\,\mathfrak{m}^{-2} - \frac{1}{2^4}B_1 e^{3\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}\,\mathfrak{m}^{-3} - \ldots \end{array}\right.$$

De là, si nous calculons

$$u_1 = 2\mathfrak{m}^{-1}, \qquad u_2 = -\tfrac{1}{2}B_0\mathfrak{m}^{-2},$$

$$u_3 = \tfrac{1}{16}B_1\mathfrak{m}^{-3}, \ldots, \qquad u_i = (-1)^{i+1}\tfrac{1}{2}B_{i-2}\,8^{-i-2}\mathfrak{m}^{-i},$$

nous aurons, en changeant le signe de $\sqrt{-1}$ dans (112) et représentant $e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}$ par 8,

$$(113)\quad \left\{\begin{array}{l} k + k'\sqrt{-1} = 1 + u_1 8 + u_2 8^2 - u_3 8^3 - u_4 8^4 - u_5 8^5 + \ldots, \\ k = 1 - u_1\sqrt{\tfrac{1}{2}} + u_3\sqrt{\tfrac{1}{2}} - u_4 - u_5\sqrt{\tfrac{1}{2}} - u_7\sqrt{\tfrac{1}{2}} + u_8 - u_9\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \ldots, \\ k' = u_1\sqrt{\tfrac{1}{2}} - u_2 - u_3\sqrt{\tfrac{1}{2}} + u_5\sqrt{\tfrac{1}{2}} - u_6 + u_7\sqrt{\tfrac{1}{2}} - u_9\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \ldots \end{array}\right.$$

Si l_1, l_2, ... sont les logarithmes ordinaires des coefficients de $\mathfrak{m}^{-1}$, $\mathfrak{m}^{-2}$, ... dans les deux dernières des formules (113),

$$\begin{array}{lll} l_1 = 0{,}1505150, & l_4 = \bar{2}{,}4948500, & l_7 = \bar{2}{,}3646348, \\ l_2 = \bar{1}{,}6989700, & l_5 = \bar{2}{,}2371251, & l_8 = \bar{2}{,}7019316, \\ l_3 = \bar{2}{,}6453650, & l_6 = \bar{2}{,}4046734, & l_9 = \bar{2}{,}6017045. \end{array}$$

et, si l'on a besoin des logarithmes des coefficients de $\mathfrak{m}^{-1}$, $\mathfrak{m}^{-2}$ dans u_1, u_2, ..., il suffira d'ajouter 0,1505150 au premier, au troisième, au cinquième, etc., des logarithmes précédents.

36. On trouvera que, lorsque $\mathfrak{m}$ est tout à fait grand, les séries (113) sont d'abord convergentes et ensuite divergentes ; et, en passant de la convergence à la divergence, les quantités u_i deviennent à peu près égales pour plusieurs termes successifs. Si, après avoir calculé i termes de la première des séries (113), nous désirons compléter les séries par une formule comprenant les dif-

férences de u_i, nous avons

$$u_i\delta^i - u_{i+1}\delta^{i+1} + u_{i+2}\delta^{i+2} - \ldots = \delta^i[1 - \delta(1+\Delta) + \delta^2(1+\Delta)^2 - \ldots]u_i$$
$$= \delta^i[1+\delta(1+\Delta)]^{-1}u_i$$
$$= \frac{\delta^i}{1+\delta}\left[1 - \frac{\delta}{1+\delta}\Delta + \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^2\Delta^2 - \ldots\right]u_i$$

et

$$1+\delta = 1 + \cos\frac{\pi}{4} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{4} = 2\cos\frac{\pi}{8}\,e^{\frac{\pi}{8}\sqrt{-1}},$$
$$\delta(1+\delta)^{-1} = \frac{1}{2}\operatorname{séc}\frac{\pi}{8}\,e^{\frac{\pi}{8}\sqrt{-1}},$$

de sorte que les quantités qu'il faut ajouter à k et k' sont

$$(114)\quad \begin{cases} \text{à } k, & (-1)^i\dfrac{1}{2}\operatorname{séc}\dfrac{\pi}{8}\left[\cos\dfrac{2i-1}{8}\pi.u_i - \dfrac{1}{2}\operatorname{séc}\dfrac{\pi}{8}\cos\dfrac{2i}{8}\pi.\Delta u_i \right. \\ & \qquad \left. + \left(\dfrac{1}{2}\operatorname{séc}\dfrac{\pi}{8}\right)^2\cos\dfrac{2i+1}{8}\pi.\Delta^2 u_i - \ldots\right], \\ \text{à } k', & (-1)^i\dfrac{1}{2}\operatorname{séc}\dfrac{\pi}{8}\left[\sin\dfrac{2i-1}{8}\pi.u_i - \dfrac{1}{2}\operatorname{séc}\dfrac{\pi}{8}\sin\dfrac{2i}{8}\pi.\Delta u_i \right. \\ & \qquad \left. + \left(\dfrac{1}{2}\operatorname{séc}\dfrac{\pi}{8}\right)^2\sin\dfrac{2i+1}{8}\pi.\Delta^2 u_i - \ldots\right]. \end{cases}$$

37. Les Tables suivantes contiennent les valeurs des fonctions k et k' calculées pour quarante différentes valeurs de $\mathfrak{m}$. De $\mathfrak{m} = 1$ à $\mathfrak{m} = 1{,}5$, le calcul a été fait au moyen de la formule (105); on a calculé le reste de la Table à l'aide des séries (113). Dans la première partie du calcul, on a employé six décimales pour calculer les fonctions M_0, ..., données par l'équation (103). On a ensuite supprimé la dernière décimale, et employé des logarithmes à cinq figures dans la multiplication des quatre fonctions M_0, M'_0, M_e et $1 - M'_e$ par $\frac{\pi}{4}$, et par L, aussi bien que dans la réduction du second membre de l'équation (105) à la forme $k + k'\sqrt{-1}$. Les termes des séries (113) ont été calculés avec cinq décimales. Les valeurs numériques de ces termes permettaient de présumer que ces séries sont suffisamment convergentes pour qu'on puisse les employer lorsque $\mathfrak{m} = 1{,}5$, et la conjecture s'est trouvée confirmée par le fait qu'elles donnent pour k et k' les valeurs 1,952 et 1,153. Pour $\mathfrak{m} = 1{,}5$ et quelques-unes des valeurs qui suivent, la

seconde et la troisième des séries (113) ont été sommées directement jusqu'à m^{-5} inclusivement, et l'on a calculé les restes par les formules (114). On a ajouté au Tableau deux colonnes qui donnent les valeurs de m^2k et de m^2k', et montrent la loi de variation des deux parties de la force F, lorsque le rayon du cylindre varie, la nature du fluide et la durée de l'oscillation restant les mêmes. On a conservé, dans tous les résultats, quatre chiffres significatifs.

m.	k.	k'.	m²k.	m²k'.	m.	k.	k'.	m²k.	m²k'.
0,0	∞	∞	0	0	2,1	1,677	0,7822	7,395	3,450
0,1	19,70	48,63	0,1970	0,4863	2,2	1,646	0,7421	7,966	3,592
0,2	9,166	16,73	0,3666	0,6691	2,3	1,618	0,7059	8,557	3,734
0,3	6,166	9,258	0,5549	0,8332	2,4	1,592	0,6730	9,168	3,877
0,4	4,771	6,185	0,7633	0,9896	2,5	1,568	0,6430	9,799	4,019
0,5	3,968	4,567	0,9920	1,142	2,6	1,546	0,6154	10,45	4,160
0,6	3,445	3,589	1,240	1,292	2,7	1,526	0,5902	11,12	4,303
0,7	3,082	2,936	1,510	1,439	2,8	1,507	0,5669	11,81	4,444
0,8	2,812	2,477	1,800	1,585	2,9	1,489	0,5453	12,52	4,586
0,9	2,604	2,137	2,110	1,731	3,0	1,473	0,5253	13,25	4,728
1,0	2,439	1,876	2,439	1,876	3,1	1,457	0,5068	14,01	4,870
1,1	2,306	1,678	2,790	2,021	3,2	1,443	0,4895	14,78	5,012
1,2	2,194	1,503	3,160	2,164	3,3	1,430	0,4732	15,57	5,154
1,3	2,102	1,365	3,552	2,307	3,4	1,417	0,4581	16,38	5,296
1,4	2,021	1,250	3,961	2,450	3,5	1,405	0,4439	17,21	5,437
1,5	1,951	1,153	4,389	2,595	3,6	1,394	0,4305	18,06	5,580
1,6	1,891	1,069	4,841	2,739	3,7	1,383	0,4179	18,93	5,721
1,7	1,838	0,9965	5,312	2,880	3,8	1,373	0,4060	19,82	5,863
1,8	1,791	0,9332	5,804	3,024	3,9	1,363	0,3948	20,73	6,005
1,9	1,749	0,8767	6,314	3,165	4,0	1,354	0,3841	21,67	6,145
2,0	1,711	0,8268	6,845	3,307	∞	1	0	∞	∞

Le calcul numérique au moyen des formules (103), (104) et (105) devient très laborieux lorsqu'on demande plusieurs valeurs des fonctions. La difficulté du calcul augmente avec la valeur de m pour deux raisons, d'abord parce que le calcul des fonctions M_0, ... devient plus long, et, en second lieu, les modules du numérateur et du dénominateur de la fraction du second membre de (105) vont en décroissant, de sorte qu'il faut donner au calcul des fonctions M_0, ... et des produits LM_0, ..., une précision de plus en plus grande, pour assurer au résultat un degré donné de précision. Au

contraire, le calcul par les séries descendantes (113) est d'une grande facilité.

On voit que les différences premières de $\mathfrak{m}^2 k'$ et de $\mathfrak{m}^2(k-1)$ sont à peu près constantes, sauf tout à fait au commencement de la Table. D'après cela, dans cette première partie, les valeurs de k ou k' correspondant à des valeurs de $\mathfrak{m}$ qui ne se trouvent pas dans la Table s'obtiendront le mieux en cherchant $\mathfrak{m}^2 k - \mathfrak{m}^2$ ou $\mathfrak{m}^2 k'$ par interpolation et passant de là aux valeurs de k et de k'. Très près du commencement de la Table, l'interpolation ne réussirait pas; dans ce cas, il faut recourir aux formules (103), (104) et (105), dont le calcul est comparativement aisé quand $\mathfrak{m}$ est petit. Il n'a pas paru utile d'étendre la Table au delà de $\mathfrak{m} = 4$, parce que, au-dessus de cette valeur, les séries (113) sont si rapidement convergentes que k et k' peuvent se calculer avec une extrême facilité à un degré suffisant d'exactitude.

38. Examinons maintenant la marche des fonctions k et k'.

Lorsque $\mathfrak{m}$ est très petit, nous en pouvons négliger les puissances dans le numérateur et le dénominateur de la fraction du second membre de l'équation (105), en gardant seulement les logarithmes et les termes constants. Nous avons ainsi

$$k + k'\sqrt{-1} = 1 - \frac{\mathfrak{m}^{-2}\sqrt{-1}}{L - \frac{\pi}{4}\sqrt{-1}},$$

d'où

$$(115) \qquad \mathfrak{m}^2(k-1) = \frac{\frac{\pi}{4}}{L^2 + \left(\frac{\pi}{4}\right)^2}, \qquad \mathfrak{m}^2 k' = \frac{-L}{L^2 + \left(\frac{\pi}{4}\right)^2},$$

L étant donné par (102) et (104) ou par (104) et (106). Lorsque $\mathfrak{m}$ s'annule, L, qui contient le logarithme de $\mathfrak{m}^{-1}$, devient infini, mais à la fin croît plus lentement que s'il variait comme $\mathfrak{m}$ affecté d'un exposant négatif mais petit. Par suite, il ressort de (115) que $k-1$ et k' sont exprimés par $\mathfrak{m}^{-2}$ multiplié par deux fonctions de $\mathfrak{m}$ qui, bien qu'elles s'annulent finalement avec $\mathfrak{m}$, décroissent très lentement, si bien qu'un changement considérable de $\mathfrak{m}$ ne produit qu'un faible changement dans ces fonctions. Or, lorsque le rayon a du cylindre varie, tout le reste étant constant, $\mathfrak{m}$ varie comme

a, et, en général, les parties de la force F, desquelles dépendent l'altération de la durée de vibration et la diminution d'amplitude de l'oscillation, varient respectivement comme a^2k et a^2k'. Donc, dans le cas d'un cylindre de petit rayon, tel que le fil auquel est suspendue la boule dans une expérience du pendule, un changement considérable du rayon du cylindre produit un changement comparativement petit dans la part d'altération de la durée et de l'amplitude de l'oscillation qui est due à la résistance éprouvée par le fil. Les formules simples (115) sont suffisamment exactes pour les fils fins, ordinairement employés dans ces expériences, si la théorie elle-même peut s'y appliquer; mais nous allons présentement exposer des raisons qui rendent très douteuse la possibilité d'appliquer la théorie à de tels fils.

De $\mathfrak{m} = 0,3$ ou $0,4$ jusqu'à la fin de la Table, les différences premières de chacune des fonctions $\mathfrak{m}^2(k-1)$ et $\mathfrak{m}^2k'$ restent à peu près constantes; par suite, pour une série assez longue de valeurs de $\mathfrak{m}$, chacune de ces fonctions peut être représentée avec une grande exactitude par $A + B\mathfrak{m}$. Lorsque $\mathfrak{m}$ devient tout à fait considérable, les deux premiers termes de la deuxième et de la troisième des formules (113) donneront k et k' avec une grande précision, parce que, indépendamment du décroissement des quantités successives $\mathfrak{m}^{-1}$, $\mathfrak{m}^{-2}$, $\mathfrak{m}^{-3}$, ..., les coefficients de $\mathfrak{m}^{-1}$ et de $\mathfrak{m}^{-2}$ sont considérablement plus grands que ceux des diverses puissances qui suivent. Si l'on néglige dans ces formules les termes au delà de u_2, on obtient

$$k = 1 + \mathfrak{m}^{-1}\sqrt{2}, \qquad k' = \mathfrak{m}^{-1}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{m}^{-2}.$$

On peut remarquer que ces expressions approchées, regardées comme fonctions du rayon a, ont précisément la même forme que les expressions exactes auxquelles nous sommes arrivés pour une sphère, les coefficients seuls étant différents.

Section IV.

Détermination du mouvement d'un fluide autour d'une sphère qui se meut uniformément avec une faible vitesse. Justification de l'application des solutions obtenues dans les Sections II et III, aux cas où l'étendue de l'oscillation n'est pas petite en comparaison du rayon de la sphère ou du cylindre. Discussion d'une difficulté qui se présente par rapport au mouvement uniforme d'un cylindre dans un fluide.

39. Considérons une sphère qui se meut dans un fluide avec une vitesse uniforme V, son centre se déplaçant en ligne droite, et conservons la même notation que dans la Section II. Supposons appliquée à la fois à la sphère et au fluide une vitesse égale et opposée à celle de la sphère; elle n'altérera point le mouvement relatif de la sphère et du fluide et réduira la détermination du mouvement du fluide à un problème de mouvement permanent. Nous avons alors, pour les équations de condition,

$$(116) \qquad R = 0, \qquad \Theta = 0, \qquad \text{pour} \quad r = a,$$

$$(117) \qquad R = -V\cos\theta, \qquad \Theta = V\sin\theta, \qquad \text{pour} \quad r = \infty.$$

Les équations de condition, aussi bien que les équations du mouvement, peuvent être satisfaites par la supposition que ψ ait la forme $\sin^2\theta f(r)$.

De (20′) nous déduisons, par le même procédé qui a servi à obtenir (33) et (34),

$$(118) \qquad \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2}\right)^2 f(r) = 0,$$

la seule différence étant que, dans le cas présent, l'équation (20′) ne peut être remplacée par les deux équations (22) et (23), qui deviennent identiques, du moment où la vitesse du fluide est indépendante du temps.

L'intégrale de (118) est

$$(119) \qquad f(r) = A r^{-1} + B r + C r^2 + D r^4,$$

ce qui donne

$$R = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{d\psi}{d\theta} = 2\cos\theta(A r^{-3} + B r^{-1} + C + D r^2),$$

$$\Theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{d\psi}{dr} = \sin\theta(A r^{-3} - B r^{-1} - 2C - 4D r^2).$$

La première des équations de condition (117) exige que

$$D = 0, \qquad C = -\tfrac{1}{2} V. \tag{120}$$

Il faut remarquer particulièrement que, puisque les deux constantes arbitraires C et D sont déterminées par la première des conditions (117), il n'en reste pas pour satisfaire à la seconde. Néanmoins il arrive que la seconde de ces conditions conduit précisément aux mêmes équations (120) que la première. Les équations de condition (116) donnent

$$A = -\tfrac{1}{4} V a^3, \qquad B = \tfrac{3}{4} V a;$$

d'où

$$\psi = \tfrac{1}{4} V a^2 \left(-\frac{2r^2}{a^2} + \frac{3r}{a} - \frac{a}{r} \right) \sin^2\theta \quad [1], \tag{121}$$

$$R = -V \left(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3} \right) \cos\theta, \tag{122}$$

$$\Theta = V \left(1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3} \right) \sin\theta. \tag{123}$$

Si nous voulons maintenant obtenir la solution du problème dans sa forme primitive, dans laquelle la sphère est en mouvement et le fluide en repos, sauf la perturbation qu'il éprouve de la part de la sphère, nous n'avons qu'à ajouter $V\cos\theta$, $-V\sin\theta$ et $\frac{1}{2} V r^2 \sin^2\theta$ aux expressions de R, Θ et ψ. Nous déduisons de (121)

$$\psi = \tfrac{1}{4} V a^2 \left(\frac{3r}{a} - \frac{a}{r} \right) \sin^2\theta. \tag{124}$$

40. Revenons maintenant au problème de la Section II; supposons que la durée de l'oscillation croisse indéfiniment, et examinons ce que l'équation (40) devient à la limite.

Lorsque τ devient infini, n et, par suite, m s'annulent; l'expression entre crochets dans (40) prend la forme $\infty - \infty$, et sa valeur limite s'obtient aisément par les méthodes ordinaires. Il faut conserver m^2 dans le coefficient de t, parce que t peut recevoir un accroissement illimité. On obtient à la limite

$$\psi = \tfrac{1}{4} a^2 c e^{\mu' m^2 t} \left(\frac{3r}{a} - \frac{a}{r} \right) \sin^2\theta. \tag{125}$$

---

[1] J'ai déjà eu l'occasion, en traitant un autre sujet, de donner la solution représentée par cette équation, que j'avais obtenue comme un cas limite du problème du pendule à boule (voir *Philosophical Magazine*, mai 1848, p. 343).

Si maintenant nous mettons V, la vitesse de la sphère, au lieu de $\frac{d\xi}{dt}$, nous tirons de (39) $ce^{\mu'm^2 t} = V$. Après substitution dans (125), l'équation reste sans changement lorsque nous passons des valeurs symboliques aux valeurs réelles de ψ et de V, et ainsi (125) est ramenée à (124).

41. Il semble alors que, en supposant que la quantité dont varie la vitesse de la sphère décroît indéfiniment, nous devons obtenir, de la solution du problème de la Section II, le même résultat qui a été obtenu dans l'art. 39, en traitant le mouvement comme constant. Mais cependant la méthode de l'art. 40 est sujette à une restriction dont celle de l'art. 39 est indépendante. Pour obtenir l'équation (40), on a supposé que l'excursion maximum de la sphère était petite en comparaison de son rayon. Si nous conservons cette restriction quand nous supposons que τ devient très grand, nous sommes forcés de supposer que c devient très petit, de sorte que la vitesse de la sphère n'est pas seulement si petite que nous puissions négliger les termes dépendant de son carré, restriction à laquelle l'art. 39 est aussi soumis, mais qu'elle est tellement petite que l'espace parcouru par la sphère même en un temps assez long est petit en comparaison de son rayon.

Nous avons vu cependant qu'en supposant τ très grand dans (40) nous obtenons un résultat identique avec (124), et non pas simplement un résultat avec lequel (124) devient identique sous le bénéfice de la restriction sus mentionnée. Ceci conduit à croire que la solution représentée par (40) est, en fait, plus générale que ne semble l'indiquer le procédé par lequel elle a été obtenue. Une légère modification de notre analyse montre qu'il en est réellement ainsi. Au lieu de rapporter le fluide à des axes fixes dans l'espace, rapportons-le à des axes qui aient leur origine au centre de la sphère et se déplacent avec lui. Dans les équations générales du mouvement, les termes qui contiennent des coefficients différentiels pris par rapport aux coordonnées resteront les mêmes, puisqu'ils représentent les mêmes rapports limites que précédemment ; il n'y a que ceux dans lesquels intervient la différentiation par rapport à t qui seront altérés. Si $\frac{d}{dt}$ est le symbole de différentiation par rapport à t quand le fluide est rapporté à des axes mobiles,

nous aurons

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} - \frac{d\xi}{dt}\frac{d}{dx};$$

mais les termes provenant de $\frac{d\xi}{dt}\frac{d}{dx}$ sont de l'ordre du carré de la vitesse, et par suite négligeables; donc les équations générales ont la même forme, que le fluide soit rapporté à des axes fixes ou à des axes mobiles. Mais, dans la dernière supposition, les équations de condition (30) deviennent rigoureusement exactes; donc l'équation (40) donne la solution correcte du problème, indépendamment de la restriction que l'excursion maximum de la sphère soit petite auprès de son rayon, pourvu que nous supposions les coordonnées polaires r et θ mesurées à partir du centre de la sphère dans sa position réelle et non dans sa position moyenne. De semblables remarques s'appliquent au problème du cylindre. Bien plus, dans le cas d'une sphère oscillant à l'intérieur d'une enveloppe sphérique concentrique, il n'est pas nécessaire, pour employer la solution obtenue dans la Section II, que le maximum d'excursion de la sphère soit petit, comparativement à son rayon; il suffit qu'il soit petit en comparaison du rayon de l'enveloppe.

Ce sont là des points de grande importance, parce que les excursions d'une sphère oscillante dans l'expérience du pendule ne sont en aucune façon extrêmement petites par rapport au rayon de la sphère; et, dans le cas d'un cylindre mince, tel que le fil de suspension, bien loin que le maximum d'excursion soit petit par rapport au rayon du cylindre, c'est au contraire le rayon qui est petit auprès du maximum d'excursion.

42. Revenons maintenant au cas du mouvement uniforme d'une sphère. Pour obtenir directement l'expression de la résistance du fluide, il faudrait d'abord trouver p, puis tirer P_r et T_θ de (46), ou tout au moins obtenir les valeurs de ces fonctions pour $r = a$, et finalement les substituer dans (47) et effectuer l'intégration. On obtiendrait p en intégrant l'expression de dp tirée de (16) et (17). Il faudrait d'abord exprimer u et q en fonction de ψ, puis transformer l'expression de dp en y introduisant les coordonnées polaires, et alors substituer à ψ sa valeur donnée par (121); ou autrement, il faudrait exprimer le second membre de (121) au moyen

des coordonnées x et ϖ et substituer dans l'expression de dp [1]. Nous avons vu cependant que les résultats applicables au mouvement uniforme peuvent se déduire, comme cas limites, de ceux qui se rapportent au mouvement oscillatoire, et, en conséquence, nous pouvons faire usage de l'expression de F déjà obtenue.

Écrivons V, au lieu de $ce^{nt\sqrt{-1}}$, dans la première équation de l'art. 20, exprimons m en fonction de n, puis faisons $n = 0$; nous obtiendrons

$$(126) \qquad -F = 6\pi\mu'\rho a V$$

et $-F$ est la résistance demandée.

Cette équation peut être employée à la détermination de la vitesse finale d'une sphère qui monte ou qui descend dans un fluide, pourvu que le mouvement soit assez lent pour que l'on puisse négliger le carré de la vitesse. Coulomb a fait voir expérimentalement [2] que, dans le cas de mouvements très lents, la résis-

---

[1] Les équations (16) et (17) donnent, après une transformation assez pénible en coordonnées polaires,

$$(a) \qquad \frac{dp}{dr} = \frac{\mu}{r^2 \sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{d}{d\theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta} - \frac{\rho}{\mu}\frac{d}{dt}\right)\psi,$$

$$(b) \qquad \frac{dp}{d\theta} = -\frac{\mu}{\sin\theta}\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{d}{d\theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta} - \frac{\rho}{\mu}\frac{d}{dt}\right)\psi.$$

L'expression de dp déduite de ces équations est une différentielle exacte, en vertu de l'équation qui détermine ψ; et dans les problèmes traités à la Section II et à la présente Section, ψ a la forme $\Psi \sin^2\theta$, où Ψ est indépendant de θ. Nous tirons donc de (b), en intégrant partiellement par rapport à θ,

$$(c) \qquad p = \mu \cos\theta \frac{d}{dr}\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2} - \frac{\rho}{\mu}\frac{d}{dt}\right)\Psi.$$

Il n'est pas nécessaire d'ajouter une fonction arbitraire de r, parce que si $\lambda(r)$ était cette fonction que nous supposons ajoutée au second membre de (c), il nous faudrait déterminer λ en substituant dans (a). L'expression résultante de $\lambda'(r)$ ne peut contenir θ, puisque l'expression de dp est une différentielle exacte, mais elle est composée de termes qui tous contiennent $\cos\theta$ en facteur, et par suite nous voyons, sans aller plus loin, que ces termes doivent se détruire les uns les autres. Par conséquent $\lambda(r)$ doit être constant, ou au plus être une fonction de t, que nous pouvons supposer renfermée dans Π. En fait, $\lambda(r)$ sera égal à zéro si Π est la pression d'équilibre à la profondeur à laquelle $\int g\,dz$ s'annule.

[2] *Mémoires de l'Institut*, t. III, p. 246. — *Collection de Mémoires relatifs à la Physique*, t. I, p. 335.

tance d'un fluide dépend en partie du carré de la vitesse et en partie de la première puissance de cette vitesse. La formule (126) détermine, dans le cas particulier d'une sphère, cette partie de la résistance totale qui dépend de la première puissance de la vitesse, bien même que la partie qui dépend du carré de la vitesse ne soit pas absolument insensible.

Il faut remarquer particulièrement que, d'après la formule (126), la résistance ne varie pas comme la surface, mais comme le rayon de la sphère, et qu'en conséquence le quotient de la résistance divisée par la masse croît dans un rapport plus élevé, à mesure que le rayon diminue, que si la résistance variait comme la surface. C'est pourquoi de fines poussières restent à peu près suspendues dans un fluide de poids spécifique très différent.

43. Lorsque le mouvement est tellement lent que l'on peut négliger la partie de la résistance qui dépend du carré de la vitesse, on a, en supposant que V est la vitesse finale,

$$-F = \tfrac{4}{3}\pi g(\sigma - \rho)a^3,$$

où g est l'intensité de la pesanteur, et σ, plus grand que ρ, la densité de la sphère. En substituant cette valeur dans (126), on obtient

$$V = \frac{2g}{9\mu'}\left(\frac{\sigma}{\rho} - 1\right)a^2. \tag{127}$$

Appliquons cette équation à la détermination de la vitesse finale d'un globule d'eau qui fait partie d'un nuage. Posons $g = 386$, $\mu' = (0,116)^2$ en prenant le pouce anglais pour unité de longueur, et supposons $\sigma\rho^{-1} - 1 = 1000$ pour tenir compte de la raréfaction de l'air à la hauteur du nuage; nous obtenons $V = 6372 \times 1000 a^2$. Ainsi la vitesse d'un globule d'un millième de pouce de diamètre est 1,593 pouce par seconde. Pour un globule d'un dix-millième de pouce, la vitesse finale serait cent fois plus faible, et ne s'élèverait pas à la soixantième partie d'un pouce par seconde.

Nous pouvons nous former une idée très exacte de la grandeur de la partie de la résistance qui varie comme le carré de la vitesse, en calculant la valeur numérique de la résistance d'après la théorie ordinaire, quelque imparfaite que soit celle-ci. Il résulte de

cette théorie, que si h est la hauteur due à la vitesse V, la résistance est au poids comme $3\rho h$ est à $8\sigma a$. Pour $V = 1,593$ pouce par seconde, la résistance n'est pas tout à fait la quatre-centième partie du poids; et, pour une sphère qui n'aurait qu'un dix-millième de pouce de diamètre et se mouvrait avec la vitesse calculée par la formule (127), le rapport de la résistance au poids serait dix fois plus petit. Les vitesses finales des globules calculées par la théorie ordinaire seraient 32,07 et 10,14 pouces par seconde, au lieu de 1,593 et 0,01593 seulement. Il semble donc que la suspension apparente des nuages est simplement due au frottement interne de l'air.

44. La résistance éprouvée par le globule a été calculée comme si ce globule était une sphère solide. En toute rigueur, il faudrait tenir compte du mouvement relatif des particules fluides qui forment le globule lui-même. Bien qu'il soit assez évident qu'il ne peut résulter de là aucun changement matériel dans le résultat, il n'est pas sans intérêt de voir quel serait le mode de solution du problème. Supposons que l'attraction capillaire conserve au globule une forme exactement sphérique, ce qui est en réalité très sensiblement le cas. Concevons imprimée à la fois au globule et au fluide qui l'entoure une vitesse égale et opposée à celle du globule, ce qui ramènera le problème à celui d'un mouvement uniforme. Rapportons ψ_1, ... au fluide qui forme le globule et prenons $\psi_1 = f_1(r)\sin^2\theta$. Alors nous avons, en changeant les constantes dans (119),

$$f_1(r) = A_1 r^{-1} + B_1 r + C_1 r^2 + D_1 r^4.$$

Les constantes arbitraires A_1 et B_1 s'annulent par la condition que la vitesse ne peut devenir infinie au centre. Il reste à déterminer les deux constantes arbitraires C_1 et D_1, outre celles qui figuraient dans le premier problème. Mais nous avons maintenant quatre équations de condition, au lieu de deux, qui doivent être satisfaites à la surface de la sphère. Ce sont

$$(128)\qquad R = 0,\qquad R_1 = 0,\qquad \Theta = \Theta_1,\qquad T_\theta = T_{1\theta},\qquad \text{lorsque } r = a.$$

Nous avons donc autant de constantes arbitraires que de conditions à satisfaire. Or $T_{1\theta}$ comprendra μ_1 comme coefficient, tout comme T_θ comprend $\mu'\rho$ ou μ; et μ_1, qui se rapporte à l'eau, est

beaucoup plus grand que μ qui se rapporte à l'air, quoique μ' soit plus grand que μ_1. Donc les résultats seront à fort peu près les mêmes que si nous prenions $\mu_1 = \infty$, ou si nous regardions la sphère comme solide.

Si cependant, au lieu d'un globule de liquide descendant dans un gaz, nous avions une bulle de gaz montant dans un liquide, nous ne pourrions pas traiter la bulle comme une sphère solide. Nous pouvons bien, dans ce cas, négliger le mouvement du fluide qui forme la sphère; mais nous sommes en présence de l'autre cas extrême du problème général, et les deux équations de condition qui doivent être satisfaites à la surface de la sphère sont que $R = 0$ et $T_\theta = 0$ lorsque $r = a$, au lieu de $R = 0$ et $\Theta = 0$ pour $r = a$.

L'équation de condition $T_\theta = 0$ qui s'applique à une bulle, aussi bien que la quatrième des équations (128), ne sont pas les véritables équations, s'il existe dans la couche superficielle d'un fluide des forces provenant du frottement intérieur qui soient d'un autre ordre de grandeur que celles qui existent dans l'intérieur de la masse. A la fin du Mémoire déjà cité, Coulomb établit que, dans les mouvements très lents, la résistance des corps non complètement immergés dans un liquide est beaucoup plus grande que celle des corps entièrement immergés, et il promet la communication d'un second Mémoire en continuation du premier. Ce Mémoire, autant que je puis le savoir, n'a jamais paru. Si l'existence de pareilles forces dans la couche superficielle d'un liquide était démontrée, il faudrait modifier les résultats déduits de la théorie du frottement intérieur d'une manière analogue à celle dont l'attraction capillaire modifie les résultats déduits des principes ordinaires de l'Hydrostatique. Il est à remarquer que nous n'avons point à tenir compte de forces de cette espèce quand nous considérons le mouvement d'un pendule dans l'air, ni même quand nous considérons les oscillations d'une sphère dans l'eau, sauf en ce qui regarde la très minime fraction de l'effet total relative à la résistance éprouvée par le fil de suspension au voisinage immédiat de la surface libre.

On peut voir aisément que l'effet d'un ensemble de forces dans la couche superficielle d'un liquide, qui offriraient une résistance particulière au mouvement relatif de ses particules, serait de faire

que la résistance opposée par le gaz au mouvement d'un globule qui tombe s'accorderait mieux encore avec le résultat obtenu en supposant le globule solide, tandis que la résistance éprouvée par une bulle qui monte serait matériellement accrue, et se rapprocherait de celle qu'éprouverait une sphère solide de même volume et sans masse ou, plus exactement, de masse égale seulement à celle du gaz qui forme la bulle. Il serait possible que la détermination de la vitesse d'ascension de très petites bulles fournît un bon moyen de mesurer la valeur du frottement dans la couche superficielle d'un liquide, s'il est vrai qu'il y existe de telles forces. Mais toute étude sur ce sujet serait actuellement prématurée.

45. Cherchons maintenant à déterminer le mouvement uniforme d'un fluide autour d'un cylindre indéfini. Si nous employons les notations de la Section III et si nous ramenons le problème à celui d'un mouvement uniforme, comme dans l'art. 39, nous arrivons aux mêmes équations de condition (116) et (117) que dans le cas de la sphère. Prenant $\chi = \sin\theta\, F(r)$ et substituant dans l'équation déduite de (69) par la transformation des coordonnées en coordonnées polaires, puis, laissant de côté les termes qui contiennent $\frac{d}{dt}$, nous obtenons

(129) $$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}\right)^2 F(r) = 0.$$

L'intégrale de cette équation s'obtient aisément en multipliant le dernier terme du symbole d'opération par $(1 + \delta)^2$, intégrant l'équation transformée et annulant alors δ. Elle est

(130) $$F(r) = A r^{-1} + B r + C r \log r + D r^3,$$

ce qui donne

$$R = \frac{d\chi}{r\,d\theta} = (A r^{-2} + B + C \log r + D r^2) \cos\theta,$$

$$\Theta = -\frac{d\chi}{dr} = (A r^{-2} - B - C - C \log r - 3 D r^2) \sin\theta.$$

La première des équations de condition (117) exige que

$$C = 0, \qquad D = 0, \qquad B = -\Gamma,$$

ce qui satisfait aussi à la seconde. Il ne nous reste donc qu'une

seule constante arbitraire pour satisfaire aux deux équations de condition (116), et la même valeur de A ne peut satisfaire à toutes deux.

46. Il suit donc de là que la supposition d'un mouvement permanent est inadmissible. On se souviendra que, dans le cas de la sphère, la solution du problème n'a été possible que parce qu'il se trouvait que les valeurs de deux constantes arbitraires déterminées de manière à satisfaire à la première des équations de condition (117) satisfaisaient aussi à la seconde, ce qui montre que la solution n'était, à bien dire, qu'un essai de solution. Nous avons évidemment le droit de concevoir une sphère ou un cylindre indéfini se trouvant à l'état de repos dans une masse indéfinie de fluide également en repos, de supposer que la sphère ou le cylindre se meuvent ensuite avec une vitesse uniforme V, et de nous proposer de déterminer le mouvement du fluide à la fin du temps t; mais nous n'avons nullement le droit d'admettre *a priori* que le mouvement tend vers un état permanent à mesure que t croît indéfiniment. Nous pouvons suivre l'une de ces deux voies : ou bien nous pouvons chercher à résoudre le problème général, dans lequel la sphère ou le cylindre est supposé partir du repos, et examiner alors les résultats qu'on obtient en supposant t croissant indéfiniment ; ou bien nous pouvons admettre comme essai que le mouvement est constant, et chercher si nous pouvons satisfaire, dans cette supposition, à toutes les conditions du problème. Le premier procédé aurait le désavantage d'exiger une analyse compliquée pour arriver à un résultat comparativement simple, et il serait même possible que la solution du problème nous échappât complètement ; mais, si nous adoptons le second moyen, nous ne devons pas oublier que les équations que nous manipulons ne sont que provisoires.

On pourrait objecter que l'impossibilité de satisfaire aux conditions du problème dans l'hypothèse d'un mouvement constant vient de ce que nous avons supposé que $\sin\theta$ était un des facteurs de χ, l'autre facteur étant indépendant de θ. Tel n'est cependant pas le cas. Car, pour des valeurs données de r et de t, χ est une fonction finie de θ depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \pi$. Nous sommes en droit de supposer que χ s'annule à tel point de l'axe des x positifs que nous vou-

lons ; et, si nous supposons que χ s'annule à ce point arbitraire, on peut faire voir, comme dans la note de l'art. 15, que χ s'annulera à tous les points de l'axe des x positifs ou négatifs. Donc χ peut se développer en une série convergente de sinus de θ et de ses multiples, et, puisque χ et ses dérivées par rapport à θ changent continuellement avec θ, les développements des dérivées s'obtiendront par une différentiation directe [1]. Cela étant vrai pour tout autre couple de valeurs de r et de t, χ peut en général se développer en une série convergente de sinus de θ et de ses multiples ; mais les coefficients, au lieu d'être constants, seront des fonctions de r et de t ou, dans le cas particulier d'un mouvement constant, des fonctions de r seulement. Maintenant un examen très superficiel des équations générales suffit à montrer que les coefficients des sinus des différents multiples de θ restent absolument indépendants pendant tout le calcul et, par conséquent, eussions-nous employé le développement général, nous serions arrivés exactement aux mêmes conclusions qui se déduisent de la forme supposée à χ.

47. Si nous rapprochons des résultats obtenus dans la Section III ce que nous venons de démontrer de l'impossibilité d'un état final permanent du mouvement, il nous devient possible de comprendre la nature générale du mouvement du fluide autour d'un cylindre indéfini qui, d'abord en repos, est ensuite animé indéfiniment d'une vitesse uniforme.

Le fluide étant regardé comme incompressible, le premier mouvement qui se produit est un mouvement d'impulsion. Comme les termes qui dépendent du frottement intérieur n'interviennent pas dans le calcul de ce mouvement, nous pouvons employer les équations ordinaires de l'Hydrodynamique. Le résultat, facile à obtenir, est celui-ci :

$$(131) \qquad R\,dr + \Theta\,r\,d\theta = d\varphi, \qquad \text{où} \qquad \varphi = -\frac{Va^2}{r}\cos\theta \quad [2].$$

---

[1] *Voir* le Mémoire *On the critical values of the sums of periodic series* (*Cambridge Phil. Trans.*, t. VIII, p. 533).

[2] D'après ces équations, le fluide coule sur la surface du cylindre avec une vitesse finie. A la fin du temps très court t' à partir du choc, le frottement a réduit la vitesse du fluide en contact avec le cylindre à celle du cylindre lui-

A mesure que le cylindre se déplace, il emporte avec lui une quantité de plus en plus grande de fluide, en raison du frottement. Pour préciser les idées, admettons que la quantité emportée par l'élément dl du cylindre soit celle qui, se mouvant avec la vitesse V, aurait, dans la direction du mouvement, la même quantité de mouvement (*momentum*) dont est effectivement animée la portion élémentaire de fluide qui est contenue entre deux plans parallèles indéfinis menés perpendiculairement à l'axe du cylindre, à une distance dl, et dont les particules qui le composent se meuvent avec des vitesses variant de V à zéro à partir de la surface. La pression du cylindre sur le fluide tend continuellement à accroître la quantité de fluide qu'il emporte avec lui, tandis que le frottement du fluide placé à distance du cylindre tend continuellement à la diminuer. Dans le cas d'une sphère, il arrive que ces deux causes se contrebalancent, et le mouvement devient permanent. Mais, dans le cas d'un cylindre, l'accroissement de la quantité de fluide entraîné l'emporte constamment sur le décroissement dû au frottement du fluide ambiant, et la quantité entraînée augmente indéfiniment à mesure que le cylindre marche. La rapidité d'accroissement de la masse entraînée va diminuant sans cesse, parce que le mouvement du fluide au voisinage du cylindre tend de plus en plus vers un simple mouvement de translation égal à celui du cylindre lui-même, et, par suite, la rapidité d'accroissement de la masse du fluide entraînée deviendrait de plus en plus petite, quand même le fluide environnant n'offrirait aucune résistance.

L'exactitude de cette explication est confirmée par les considérations suivantes. Supposons que $F(r)$ soit donné par l'équation

$$F(r) = Ar^{-1} + Br + Cr^{1-\delta} + Dr^3,$$

---

même, et la vitesse tangentielle varie très rapidement à mesure que l'on considère des points éloignés de la surface. A une petite distance s de la surface du cylindre, la vitesse relative du fluide et du cylindre, dans une direction tangentielle à la surface, est une fonction des variables indépendantes t' et s, qui s'annule avec s pour toute valeur donnée de t', mais qui, pour toute valeur donnée, mais très petite, de s, s'approche indéfiniment de la valeur déterminée par (131) lorsque t' s'approche de zéro. La communication du mouvement latéral est semblable à la communication de la température lorsque la surface d'un corps voit sa température s'élever ou s'abaisser instantanément d'une quantité finie.

au lieu de l'être par l'équation (130), δ étant une quantité positive petite. Dans cette supposition, il serait possible de satisfaire à toutes les équations de condition et, par conséquent, un mouvement permanent serait possible. En déterminant les constantes arbitraires et les substituant dans χ, nous obtiendrons

$$\psi = aV\left[-\frac{\delta}{2-\delta}\frac{a}{r}-\frac{r}{a}+\frac{2}{2-\delta}\left(\frac{r}{a}\right)^{1-\delta}\right]\sin\theta,$$

$$R = V\left[-\frac{\delta}{2-\delta}\left(\frac{a}{r}\right)^{2}-1+\frac{2}{2-\delta}\left(\frac{r}{a}\right)^{-\delta}\right]\cos\theta,$$

$$\Theta = V\left[-\frac{\delta}{2-\delta}\left(\frac{a}{r}\right)^{2}+1-\frac{2(1-\delta)}{2-\delta}\left(\frac{r}{a}\right)^{-\delta}\right]\sin\theta.$$

Puisque δ est supposé extrêmement petit, il suit de ces expressions que, lorsque r n'est pas plus grand qu'un multiple peu élevé de a, les vitesses R et Θ sont extrêmement petites ; mais, quelque petit que soit δ, il suffit d'aller assez loin du cylindre pour trouver des vitesses aussi approchées qu'on voudra de $-V\cos\theta$ et $+V\sin\theta$. Mais la distance à partir du cylindre à laquelle il faut aller pour trouver des vitesses R et Θ qui ne diffèrent de leurs valeurs limites $-V\cos\theta$ et $+V\sin\theta$ que de quantités données, croît indéfiniment à mesure que δ diminue. Donc, rendant au fluide et au cylindre la vitesse V, nous voyons qu'au voisinage du cylindre le mouvement du fluide ne diffère pas sensiblement d'un mouvement de translation, le même que celui du cylindre lui-même, tandis que la distance à laquelle le cylindre exerce une influence perturbatrice sensible sur le mouvement du fluide augmente indéfiniment à mesure que δ diminue.

48. Lorsqu'on a formé les équations du mouvement du fluide dans une hypothèse dynamique particulière, ce n'est plus qu'un problème mathématique bien défini que de déterminer le mouvement de ce fluide quand un solide donné, primitivement en repos, aussi bien que le fluide, est mis en mouvement d'une manière donnée, ou que de discuter le caractère de la solution analytique dans tout cas extrême qu'on se proposera. Mais c'est tout autre chose de chercher dans quelle mesure peuvent se modifier, dans les cas extrêmes, les principes qui ont fourni les données mathé-

matiques du problème, ou quelle sera, dans ces mêmes cas, la nature du mouvement effectif.

Examinons à ce point de vue le cas considéré dans le précédent article comme un problème mathématique. Lorsque la quantité de fluide entraînée avec le cylindre devient considérable par rapport à la quantité déplacée, il semble que le mouvement devrait devenir instable, en prenant ce mot dans le sens dans lequel on pourrait dire du mouvement d'une sphère roulant en descendant le long de la génératrice supérieure d'un cylindre incliné qu'il est instable. Mais, outre cette instabilité, il n'est pas certain qu'on puisse, dans un tel cas extrême, négliger les termes qui dépendent du carré de la vitesse, non pas qu'ils deviennent extraordinairement grands en eux-mêmes, mais seulement extraordinairement grands par rapport aux termes conservés, parce que quand les mouvements relatifs des portions environnantes du fluide deviennent très petits, les pressions tangentielles qui naissent du frottement deviennent en même temps extrêmement petites.

Maintenant, le caractère général du mouvement doit être à très peu près le même, que la vitesse du cylindre soit constante ou qu'elle varie lentement avec le temps, de sorte qu'elle ne varie pas sensiblement lorsque le cylindre parcourt un espace égal à un petit multiple de son rayon. Pour en revenir au problème de la Section III, il semblerait que, si le rayon du cylindre est très petit, le mouvement qui serait représenté par les formules de cette Section devrait être instable. Ce pourrait très bien être le cas pour les fils fins dont on fait usage pour suspendre les boules dans les expériences du pendule. S'il en était ainsi, la masse de fluide entraînée par le fil serait diminuée, certaines portions de ce fluide restant constamment en arrière pour former des remous. La résistance éprouvée par le fil serait, en fin de compte, accrue, et se rapprocherait en outre d'une résistance qui serait fonction de la vitesse. Donc, en tant qu'il dépend du fil, l'arc d'oscillation serait plus influencé par la résistance de l'air que ne le veulent les formules de la Section III. Quant à savoir si la durée de l'oscillation serait plus grande ou plus petite que celle qui ressort de ces formules, il est difficile de le dire, parce que si, d'une part, l'accroissement de la résistance tend à accroître l'influence produite

sur la durée de l'oscillation, d'autre part, le fait que la loi de la résistance se rapproche de celle d'une fonction de la vitesse tend au contraire à la diminuer.

Section V.

De l'effet du frottement intérieur pour amortir le mouvement du fluide. Application au cas des ondes oscillatoires.

49. Nous avons déjà rencontré des cas où l'effet du frottement est de produire un amortissement graduel du mouvement du solide qui oscille dans le fluide ; mais on peut aisément déduire des équations du mouvement dans leur forme la plus générale un résultat qui montre très clairement l'effet du frottement pour produire une consommation continuelle du travail des forces qui agissent sur le fluide.

Soient P_1, P_2 et P_3 les trois pressions normales, et T_1, T_2 et T_3 les trois pressions tangentielles dans la direction de trois plans rectangulaires parallèles aux plans coordonnés, et soit D le symbole de la différentiation par rapport à t lorsque la particule reste la même, mais non le point de l'espace. Alors les équations générales applicables à un fluide hétérogène [équations (10) de mon premier Mémoire] sont

$$(132) \qquad \rho\left(\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t} - X\right) + \frac{dP_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} = 0,$$

avec les deux autres équations qu'on peut écrire à la suite par symétrie. Les pressions P_1, ... sont données par les équations

$$(133) \qquad P_1 = p - 2\mu\left(\frac{du}{dx} - \delta\right), \qquad T_1 = -\mu\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right),$$

et quatre autres équations semblables. Dans ces équations,

$$(134) \qquad 3\delta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}.$$

Soit, à la fin du temps t, V la force vive d'une portion limitée du fluide, occupant l'espace contenu dans la surface close S, et soit V + DV la force vive de la même masse à la fin du temps

$t + Dt$. Alors

$$V = \int\int\int \rho(u^2 + v^2 + w^2)\,dx\,dy\,dz,$$

$$(135)\qquad DV = 2\,Dt\int\int\int \rho\left(u\frac{Du}{Dt} + v\frac{Dv}{Dt} + w\frac{Dw}{Dt}\right)dx\,dy\,dz,$$

l'intégrale triple s'étendant à tout l'espace limité par S. Substituons maintenant à $\frac{Du}{Dt}$, ... leurs valeurs données par les équations du système (132); nous obtenons

$$(136)\quad \left\{\begin{aligned} DV &= 2\,Dt\int\int\int \rho(uX + vY + wZ)\,dx\,dy\,dz \\ &+ 2\,Dt\int\int\int\Big[\; u\left(\frac{dP_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz}\right) \\ &\qquad + v\left(\frac{dP_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz} + \frac{dT_3}{dx}\right) \\ &\qquad + w\left(\frac{dP_3}{dz} + \frac{dT_2}{dx} + \frac{dT_1}{dy}\right)\Big]dx\,dy\,dz. \end{aligned}\right.$$

La première partie de cette expression est évidemment deux fois le travail, pendant le temps Dt, des forces extérieures qui agissent d'un bout à l'autre de la masse. La deuxième partie devient, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} &-2\,Dt\int\int(uP_1 + vT_3 + wT_2)\,dy\,dz \\ &-2\,Dt\int\int(vP_2 + wT_1 + uT_3)\,dz\,dx - 2\,Dt\int\int(wP_3 + uT_2 + vT_1)\,dx\,dy \\ &-2\,Dt\int\int\int\Big[\frac{du}{dx}P_1 + \frac{dv}{dy}P_2 + \frac{dw}{dz}P_3 + \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right)T_1 \\ &\qquad + \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right)T_2 + \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)T_3\Big]dx\,dy\,dz. \end{aligned}$$

Les intégrales doubles de cette expression doivent être étendues à toute la surface S. Si dS est un élément de cette surface, l', m', n' les cosinus de direction de la normale élevée sur dS vers l'extérieur, on peut écrire $l'\,dS$, $m'\,dS$ et $n'\,dS$ à la place de $dy\,dz$, $dz\,dx$ et $dx\,dy$. La seconde partie de DV devient alors

$$\begin{aligned} -2\,Dt\int\int\Big[\; &u(l'P_1 + m'T_3 + n'T_2) \\ &+ v(m'P_2 + n'T_1 + l'T_3) + w(n'P_3 + l'T_2 + m'T_1)\Big]dS. \end{aligned}$$

Les coefficients de u, v, w dans cette expression sont les composantes, suivant les directions des x, y et z, de la pression exercée sur un plan dans la direction de la surface élémentaire dS, d'où il suit que l'expression elle-même représente deux fois le travail des pressions appliquées à la surface de la portion de fluide que nous considérons.

En remplaçant P_1, ... par leurs valeurs données par les équations (133) et (134), on obtient pour la dernière partie de DV

$$
\begin{aligned}
&+2\,\mathrm{D}t\iiint p\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)dx\,dy\,dz\\
&-2\,\mathrm{D}t\iiint \mu\left[2\left(\frac{du}{dx}\right)^2+2\left(\frac{dv}{dy}\right)^2+2\left(\frac{dw}{dz}\right)^2\right.\\
&\qquad\qquad -\frac{2}{3}\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)^2+\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)^2\\
&\qquad\qquad\qquad \left.+\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)^2\right]dx\,dy\,dz.
\end{aligned}
$$

Dans cette expression, p désigne, dans le cas d'un fluide élastique, la pression qui correspond statiquement à la densité réelle autour du point dont les coordonnées sont x, y et z ; et la partie de l'expression qui contient p représente le double du travail converti en force vive par suite des dilatations intérieures, et qui naît des forces dont dépend l'élasticité. La dernière partie de l'expression est essentiellement négative, ou du moins ne peut être positive, et ne peut que s'annuler dans un cas très particulier. Elle représente la force vive consommée, ou le double du travail perdu dans le système pendant le temps dt, par suite du frottement intérieur. Suivant la très importante théorie de M. Joule, qui est fondée sur un ensemble d'expériences très frappantes et des plus concluantes, le travail ainsi perdu en apparence est transformé en chaleur, le travail résultant de la chute d'un poids de 772 livres avoirdupois qui tombe d'une hauteur de 1 pied anglais donnant la chaleur nécessaire pour élever de 1°F. la température d'une livre d'eau.

50. L'intégrale triple qui contient μ ne peut s'annuler que si les coefficients différentiels de u, v, w satisfont aux cinq équations

suivantes :

$$(137)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = \dfrac{dv}{dy} = \dfrac{dw}{dz}, \\ \dfrac{dv}{dz} + \dfrac{dw}{dy} = 0, \qquad \dfrac{dw}{dx} + \dfrac{du}{dz} = 0, \qquad \dfrac{du}{dy} + \dfrac{dv}{dx} = 0. \end{cases}$$

Ces équations donnent immédiatement les expressions suivantes des différentielles de u, v, w, dans lesquelles les coordonnées seules sont supposées varier, le temps restant constant,

$$(138)\quad \begin{cases} du = \delta\, dx - \omega'''\, dy + \omega''\, dz, \\ dv = \delta\, dy - \omega'\ dz + \omega'''dx, \\ dw = \delta\, dz - \omega''\ dx + \omega'\, dy. \end{cases}$$

Dans ces équations, δ, ω', ω'', ω''' sont de certaines fonctions dont les formes sont définies par les équations (138), mais qu'il est inutile de considérer maintenant. Il suit des équations (138) que le mouvement de chaque élément du fluide à l'intérieur de la surface S se compose d'un mouvement de translation, d'un mouvement de rotation, et d'un mouvement de dilatation, le même dans toutes les directions. En ce qui concerne les deux premières espèces de mouvement, l'élément fluide se meut comme un solide et, par suite, il n'y a rien qui puisse mettre en jeu le frottement intérieur. J'ai été conduit, par les raisons exposées dans mon premier Mémoire, à admettre qu'un mouvement de dilatation semblable dans toutes les directions, mouvement qui, naturellement, ne peut exister que dans le cas d'un fluide élastique, ne peut avoir pour effet de faire que la pression diffère de la pression statique qui correspond à la densité réelle, c'est-à-dire de produire une altération dans la relation fonctionnelle ordinairement admise entre la pression, la densité et la température. Le lecteur remarquera que c'est tout autre chose que d'admettre qu'un mouvement de dilatation n'a pas du tout d'influence sur la pression.

Si le fluide est incompressible, $\delta = 0$, et l'on peut démontrer sans difficulté que ω', ω'', ω''' sont constants, c'est-à-dire constants en ce qui regarde les coordonnées. Dans ce cas, on obtient, en intégrant les équations (137),

$$(139)\quad \begin{cases} u = a - \omega'''y + \omega''\ z, \\ v = b - \omega'\ z + \omega''x, \\ w = c - \omega''x + \omega'y. \end{cases}$$

Par suite, dans le cas d'un fluide incompressible, à moins que la masse entière renfermée dans la surface S ne se meuve tout d'une pièce à la façon d'un solide, il ne peut manquer d'arriver qu'une certaine portion de la force vive ne soit perdue par frottement intérieur. Dans le cas d'un fluide élastique, le mouvement qui peut avoir lieu sans amener une perte de force vive en raison du frottement est un peu plus général, et correspond aux vitesses $u + \Delta u$, $v + \Delta v$, $w + \Delta w$, où u, v, w sont les mêmes que dans (139) et où

$$\Delta u = \delta x + 2(\alpha x + \beta y + \gamma z)x - \alpha(x^2 + y^2 + z^2),$$

avec deux expressions semblables pour Δv et Δw. Dans ces expressions, α, β, γ sont trois constantes, symétriquement rapportées à x, y et z, et δ est une constante qui a la même relation avec chacune des coordonnées [1].

DEUXIÈME PARTIE.

COMPARAISON DE LA THÉORIE ET DE L'EXPÉRIENCE

Première Section.

Discussion des expériences de Baily, Bessel, Coulomb et Dubuat.

54. On prendra, dans cette Section, les expériences dans l'ordre qui paraîtra le plus convenable pour la discussion. Or il se trouve que cet ordre est précisément l'inverse de l'ordre chronologique.

Je commence donc par les expériences de feu M. Baily, qu'il a décrites dans les *Transactions philosophiques* de 1832, dans un Mémoire intitulé : *De la correction des observations d'un pendule pour la réduction au vide,* suivi de *Remarques sur quelques anomalies observées dans les expériences du pendule* [2].

Le but de ces expériences était de déterminer directement par

---

[1] *Voir* la note C à la fin. [Je supprime ici, pour les raisons que j'ai dites page 288, les art. 51, 52 et 53. (C. W.)]

[2] *Voir* dans ce Volume, page 185, la traduction de ce Mémoire de Baily.

l'observation la correction à faire subir à la durée d'oscillation, en raison de la présence de l'air, pour des pendules de formes très diverses. A cet effet, chaque pendule était placé successivement dans un appareil où l'on pouvait faire le vide, de sorte que ce pendule pouvait, sans être démonté, être mis en oscillation alternativement dans l'air à la pression ordinaire, et dans un air raréfié au point d'approcher du vide parfait. Le Mémoire présenté d'abord à la Société Royale contenait les résultats obtenus avec 41 pendules, le même système étant compté comme un pendule différent chaque fois que l'on changeait son mode d'oscillation. De ces 41 pendules, 14 ont des formes qui permettent la comparaison de l'expérience avec la théorie. Un Supplément au Mémoire contient les résultats obtenus avec 45 autres pendules, dont 24 permettent la comparaison avec la théorie. On ne donne pas les détails, mais seulement les résultats de ces expériences additionnelles.

Baily a exprimé les résultats obtenus avec les divers pendules de deux manières : d'abord par la valeur du facteur n par lequel il faut multiplier la correction de perte de poids dans l'air pour représenter l'effet total de l'air tel que le donne l'observation ; et en second lieu, par le poids de la masse d'air qu'il faut concevoir adhérente, attachée au centre de gyration du pendule, et accroissant son inertie sans ajouter à son poids, pour que l'inertie ainsi accrue, combinée avec la perte de poids dans l'air, suffise à rendre compte de l'effet total observé. J'emploierai la lettre $\mathfrak{n}$ au lieu de l'n de Baily, afin d'éviter la confusion avec la même lettre de la première Partie de ce Mémoire, où elle a une signification toute différente. Dans le cas d'un pendule oscillant dans l'air, il suffira, à moins que le pendule ne soit composé de matériaux d'une légèreté extrême, d'additionner ensemble les effets de la perte de poids et de l'inertie. Ainsi, si le pendule est formé d'une sphère suspendue à un fil fin dont on peut négliger l'influence, ou encore d'une tige cylindrique uniforme, nous pouvons supposer $\mathfrak{n} = 1 + k$, k étant le facteur ainsi désigné dans la première Partie ; de sorte que si M' est la masse de l'air déplacé, kM' sera la masse qu'il faut supposer rassemblée au centre de la sphère, ou distribuée uniformément le long de l'axe du cylindre pour représenter l'effet de l'inertie de l'air. Cette seconde manière de représenter l'effet

de l'air a été proposée par M. Airy, et elle est mieux adaptée que la première à la recherche de l'effet des différentes pièces dont un pendule de forme compliquée est composé. Puisque la valeur du facteur n et celle du poids de l'air ne sont que deux expressions différentes du résultat d'une même expérience, il suffirait de comparer l'une ou l'autre au résultat calculé par la théorie. Dans quelques cas cependant, j'ai calculé les deux expressions. Le résultat expérimental est parfois donné avec quatre figures; en réalité on ne peut accorder aucune confiance à la dernière. En fait, dans les meilleures expériences, l'erreur moyenne des différentes déterminations de n pour le même pendule semble être environ $\frac{1}{100}$ de la valeur totale et cette petitesse est une preuve du soin extrême avec lequel les expériences ont été faites.

55. Je commence par la quinzième série des expériences (*Résultats obtenus avec de simples tiges cylindriques,* voir p. 236). Cette série comprend trois pendules, dont chacun consistait en une longue tige attachée à un couteau. Le résultat obtenu avec chaque pendule fournit une équation pour la détermination de μ', et la vérification de la théorie ressort de l'accord ou de la discordance des valeurs ainsi obtenues. Les principaux éléments du calcul sont donnés dans le Tableau suivant.

Tige du pendule.	Nos.	Diamètre $2a$.	Durée d'oscillation. τ.	n d'après l'expérience.	Correction pour un espace confiné, d'après la théorie.	Valeur de k déduite de l'expérience.	Valeur correspondante de m.	Valeur résultante de $\sqrt{\mu'}$.
Cuivre, 58,8 po de long.	21	0,410	1,0136	2,932	−0,009	1,923	1,5445	0,1166
Laiton, 56,4 »	43	0,185	0,9933	4,083	−0,002	3,081	0,7000	0,1175
Acier, 56,4 »	44	0,072	0,9933	7,530	»	6,530	0,2822	0,1134

La première colonne de ce Tableau s'explique d'elle-même. La suivante contient le nombre de référence ; dans le cas de la tige de cuivre, j'ai remplacé 42 par 21, qui est le numéro du paragraphe où l'on trouve les détails de l'expérience. Les diamètres des tiges sont exprimés en parties décimales du pouce anglais.

La durée d'oscillation du pendule n° 21 se déduit des Tableaux imprimés à la fin du Mémoire de Baily, qui contiennent les détails des expériences. Les nos 43 et 44 appartiennent aux *Expériences additionnelles* dont on ne donne pas les détails. Baily n'a même pas donné les durées d'oscillation, ne connaissant pas cette circonstance, indiquée par la théorie que j'ai exposée dans ce Mémoire, que le facteur $\mathfrak{n}$ et le poids de l'air qui doit être regardé comme entraîné par le pendule sont fonctions de la durée de l'oscillation. En conséquence, dans le cas des pendules nos 43 et 44, et dans tous les cas semblables, j'ai calculé la durée de l'oscillation par les formules ordinaires de la Dynamique. Dans ce calcul de τ, j'ai ajouté à la longueur des tiges 1,55 pouce, longueur de la queue de l'appareil de suspension. Le résultat ainsi obtenu est bien suffisamment exact pour le but que je me propose. Si l'on avait supposé que la tige, conservant sa longueur effective, commençait directement à l'arête du couteau, l'erreur qui en serait résultée sur la valeur de τ, ou plutôt l'erreur correspondante sur la valeur calculée de $\mathfrak{n}$ ou de k, aurait été à peine sensible. La cinquième colonne du Tableau est copiée dans le Tableau de Baily. La suivante donne la petite correction nécessaire pour réduire la valeur de $\mathfrak{n}$ déduite de l'observation à ce qu'elle aurait été si on l'avait tirée d'observations faites dans une masse indéfinie de fluide. Elle est calculée par la formule

$$2a^2(b^2-a^2)^{-1} \quad \text{ou approximativement} \quad 2a^2b^{-2}$$

qui se tire des équations ordinaires de l'Hydrodynamique et, par conséquent, ne peut être regardée que comme une grossière approximation. Elle est utile cependant, comme donnant une idée de la grandeur de l'effet produit par l'enveloppe qui limite la masse d'air. Baily rapporte que le diamètre du tube qui formait cette enveloppe était de 6,5 pouces, sans dire s'il s'agit du diamètre intérieur ou de l'extérieur; nous prendrons donc $2b=6,5$. Les valeurs de k données dans la colonne suivante sont obtenues en appliquant la correction précédente aux valeurs de $\mathfrak{n}$ données par Baily, puis en retranchant l'unité. La valeur de $\mathfrak{m}$ correspondant à chaque valeur de k a été déduite, par interpolation, de la Table qui se trouve vers la fin de la troisième Section de la première Partie du présent Mémoire. Pour $k=1,923$, l'inter-

polation est facile. Il arrive que la valeur 3,081 se trouve presque exactement dans la Table. Pour $k = 6,530$, une remarque déjà faite prend une grande importance, c'est que les différences premières de $\mathfrak{m}^2(k-1)$ sont à peu près constantes. La dernière colonne contient la valeur de $\sqrt{\mu'}$ déduite de l'équation

$$(147) \qquad \mathfrak{m} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\mu'\tau}},$$

qui contient la définition de $\mathfrak{m}$.

On remarquera que les trois valeurs de $\sqrt{\mu'}$ sont à très peu près identiques. Il est bien vrai qu'une théorie quelconque ayant pour objet de rendre compte d'une série d'expériences au moyen d'une valeur particulière attribuée à une constante arbitraire, si on l'applique à des expériences faites dans des conditions à peu près identiques, doit conduire à une valeur presque toujours la même de la constante. Mais, dans le cas actuel, les circonstances des expériences sont grandement différentes. Le diamètre de la tige d'acier est un peu plus du sixième de celui de la tige de cuivre, et la valeur de k trouvée par expérience pour l'acier est plus de trois fois aussi grande que celle qui a été trouvée pour le cuivre. Les théories ordinaires de l'Hydrodynamique donnent la valeur $k = 1$ pour le cas d'une longue tige oscillant dans un fluide illimité, et nous voyons que, pour rendre compte des effets observés, cette valeur de k doit être multipliée, en nombres ronds, par 2, 3 et 6,5. La valeur 1,5445 de $\mathfrak{m}$ est si grande, qu'il faut employer au calcul de la fonction k la série ordonnée suivant les puissances décroissantes de a, tandis que la valeur 0,2822 est si petite, que les séries ascendantes sont rapidement convergentes. Par conséquent, l'accord presque parfait des valeurs de $\sqrt{\mu'}$, déduites des trois expériences, est une confirmation frappante de la théorie. La moyenne des trois valeurs est 0,1158, mais en réalité on ne peut répondre de la dernière décimale. J'admettrai, en conséquence, pour valeur de la racine carrée de l'indice de frottement de l'air à son état moyen de pression, de température et d'humidité

$$\sqrt{\mu'} = 0,116.$$

On se rappellera que $\sqrt{\mu'}$ exprime une longueur divisée par la

racine carrée d'un temps, et que la valeur numérique ici donnée se rapporte au pouce anglais pris pour unité de longueur, et à la seconde de temps solaire moyen comme unité de temps.

56. Je vais maintenant comparer les valeurs observées de n avec celles que l'on calcule d'après la théorie au moyen de cette valeur de $\sqrt{\mu'}$. Je commence par les trois tiges cylindriques déjà considérées, auxquelles je joins les longs tubes de laiton nos 35 à 38. Le diamètre de ce tube était de 1,5 pouce et sa longueur 56 pouces. Il était ouvert aux deux extrémités; mais, comme l'air renfermé dans le tube a été considéré par M. Baily, dans la réduction de ses expériences, comme faisant partie du pendule, nous pouvons regarder ce pendule comme une tige solide. Au tube étaient fixés six plans d'agate, représentés dans la gravure de la page 207, qui reposaient sur les arêtes de couteaux fixes. Les pendules nos 35, 36, 37 et 38 étaient formés de ce même tube oscillant sur les plans marqués A, C, *a*, *c*. Dans l'air, le pendule oscillait à raison d'environ 90080 oscillations par jour, de sorte que $\tau = 0,9596$ à peu près. Les valeurs de n obtenues avec les plans des extrémités A et *c* furent légèrement, mais sensiblement, plus grandes que les valeurs obtenues avec les plans moyens C et *a*. Je supposerai que la moyenne des quatre valeurs de n, savoir 2,290, est le résultat vrai des expériences. Le Tableau suivant donne la différence entre les valeurs théoriques et expérimentales de n à la fois en décimales et en parties fractionnaires de la première de ces valeurs.

Résultats de Baily avec un long tube de laiton et de longues tiges cylindriques

Nos.	$2a$.	m.	k.	Correction à ajouter pour la limitation de l'espace.	n total d'après la théorie.	n d'après l'expérience.	Différence.
35 à 38...	1,500	5,849	1,242	0,122	2,364	2,290	$-$ 0,074 ou $-\frac{1}{31}$
41 ou 42...	0,410	1,555	1,917	0,009	2,926	2,932	$+$ 0,006 ou $+\frac{1}{489}$
43........	0,185	0,7089	3,055	0,002	4,057	4,083	$+$ 0,026 ou $+\frac{1}{157}$
44........	0,072	0,2759	6,670	»	7,670	7,530	$-$ 0,140 ou $-\frac{1}{54}$

On voit avec quelle exactitude les expériences sont représentées par la théorie. La plus grande différence relative se présente dans le cas du tube de laiton, et même alors est encore moindre que $\frac{1}{30}$. Un coup d'œil jeté sur la figure de la page 207 du Mémoire de Baily montre que les six plans d'agate, dont le tube était muni, en rendaient la forme générale sensiblement différente de celle d'un cylindre. De plus, la résistance éprouvée par chaque élément du cylindre a été calculée comme si l'élément en question appartenait à un cylindre indéfini oscillant avec la même vitesse angulaire, et la résistance ainsi déterminée doit être un peu trop grande au voisinage immédiat des extrémités du cylindre, où le libre mouvement de l'air éprouve moins d'obstacle que si le cylindre se prolongeait indéfiniment. Enfin, la correction relative à la limitation de l'espace est calculée conformément aux équations ordinaires de l'Hydrodynamique, et, pour cette raison, aussi bien qu'en conséquence de la terminaison abrupte du cylindre, ne peut être qu'approchée. La petite discordance entre la théorie et l'observation, aussi bien que la faible différence (environ $\frac{1}{83}$ de la valeur totale) que manifeste l'expérience entre les résultats relatifs aux plans extrêmes et ceux qui se rapportent aux plans intermédiaires, peut raisonnablement être attribuée à des causes telles que celles qui viennent d'être mentionnées. Dans le cas de la tige ou du fil d'acier, la différence entre la théorie et l'observation peut être entièrement écartée, si l'on suppose qu'une très petite erreur s'est glissée dans la détermination du diamètre de la tige. Puisque, ainsi qu'on l'a vu, l'observation est satisfaite par $\mathfrak{m} = 0,2822$, et que d'après (147) a est proportionnel à $\mathfrak{m}$ lorsque μ' et r sont constants, il suffit, pour satisfaire à l'expérience, d'augmenter le diamètre dans le rapport de 0,2759 à 0,2822, ou de supposer une erreur en moins de 0,0017 pouce seulement sur la mesure du diamètre de la tige.

57. Je passe maintenant aux expériences sur des sphères suspendues à des fils fins. Les pendules de cette forme comprennent quatre sphères d'un pouce et demi, les n°s 1, 2, 3 et 4, trois sphères de deux pouces, les n°s 5, 6 et 7, et une sphère de trois pouces, le n° 66. Les n°s 8 et 9 sont des pendules formés des mêmes sphères que les n°s 5 et 7, mais le fil de suspension passait sur un

cylindre au lieu d'être attaché à l'arête d'un couteau. Comme ce mode de suspension ne s'est pas montré très satisfaisant, et que les résultats sont marqués par Baily comme douteux, je ne m'occuperai pas de ces pendules nos 8 et 9, d'autant plus que, au point de vue de nos recherches, les expériences ne sont que la répétition de celles qui ont été faites avec les pendules 5 et 7.

Dans le cas d'une sphère attachée à un fil fin dont on néglige l'influence et oscillant dans une masse de fluide indéfinie, nous avons, d'après la formule (52),

$$k = \frac{1}{2} + \frac{9}{2a}\sqrt{\frac{\mu'\tau}{2\pi}}, \tag{118}$$

$2a$ étant ici le diamètre de la sphère. Mais, avant d'employer cette formule à la comparaison de la théorie et de l'expérience, il est nécessaire de tenir compte de deux corrections relatives, l'une à l'influence du fil, l'autre à l'influence des parois du cylindre qui limitent la masse d'air environnante.

J'ai déjà remarqué, à la fin de la Section IV de la première Partie, que l'application des formules de la Section III au cas de fils aussi fins que ceux dont on fait usage dans les expériences du pendule n'est pas absolument légitime. Quoi qu'il en soit de cette réserve, ces formules peuvent cependant nous fournir, tout au moins, une juste appréciation de la grandeur probable de la correction.

Soient

l la longueur;
a_1 le rayon;
V_1 le volume du fil;
V le volume de la sphère;
I le moment d'inertie du pendule;
I' celui de l'air que l'on peut considérer comme entraîné par lui;
H la somme des éléments de la masse du pendule multipliés par leurs distances verticales respectives à l'axe de suspension;
H' la même somme pour l'air déplacé;
σ la densité de l'air.

La longueur du pendule simple synchrone est IH^{-1} dans le vide

et $(I+I')(H-H')^{-1}$ dans l'air, et la durée de vibration est accrue par l'air dans le rapport de $I^{\frac{1}{2}}H^{-\frac{1}{2}}$ à $(I+I')^{\frac{1}{2}}(H-H')^{-\frac{1}{2}}$, ou à cause de la petitesse de σ, dans le rapport de l'unité à $1+\frac{1}{2}(I'I^{-1}+H'H^{-1})$ à peu près. Mais $\frac{1}{2}H'H^{-1}$ est la correction de perte de poids dans l'air, et, par conséquent,

(149) $$n-1=\frac{I'}{H'}\frac{H}{I}.$$

Nous avons donc, si k_1 est la valeur de la fonction k de la Section III, première Partie,

(150) $$I'=k\sigma V(l+a)^2+\tfrac{1}{3}k_1\sigma V_1 l^2,\qquad H'=\sigma V(l+a)+\tfrac{1}{2}\sigma V_1 l$$

et $HI^{-1}=(l+a)^{-1}$ à très peu près. Substituant dans (149), développant le dénominateur et négligeant V_1^2, nous obtenons

$$n-1=k+\frac{1}{3}\frac{V_1}{V}k_1\left(\frac{l}{l+a}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{V_1}{V}k\frac{l}{l+a}.$$

Mais V_1 est très petit auprès de V, et ce n'est qu'en raison de la grandeur du facteur k_1 par lequel il est multiplié, qu'il acquiert une certaine importance. Nous pouvons donc, sans erreur sensible, remplacer le dernier terme de l'équation précédente par $\frac{1}{3}V_1V^{-1}l^2(l+a)^{-2}$, et si λ est la longueur du pendule simple synchrone, nous pouvons supposer $l+a=\lambda$, et remplacer $l^2(l+a)^{-2}$ par $1-2a\lambda^{-1}$, puisque a est petit auprès de λ. Nous obtenons ainsi, en désignant par Δn la correction due au fil,

$$\Delta n=\frac{1}{3}\frac{V_1}{V}\left(1-\frac{2a}{\lambda}\right)(k_1-1).$$

Remplaçons k_1-1 par sa valeur tirée de (115), m par sa valeur tirée de (147), en supposant, toutefois, que dans ces équations k et a sont remplacés par k_1 et a_1; exprimons V_1 et V en fonction des diamètres du fil et de la sphère, et négligeons, comme précédemment, a^2 auprès de λ^2, nous obtiendrons

(151) $$\Delta n=\frac{(2\lambda-3\times 2a)\mu'\tau}{\left[L^2+\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\right](2a)^3},$$

équation dans laquelle

(152) $$-L=\log_e\frac{4}{2a_1}\sqrt{\frac{\mu'\tau}{\pi}}-0,5772.$$

C'est au moyen de ces formules que j'ai calculé la correction due au fil dans la Table qui suit. Dans les expériences, la durée d'oscillation était si voisine d'une seconde, qu'il suffit de faire $\tau = 1$ dans les formules (148), (151) et (152) et de prendre λ égal à la longueur du pendule à secondes, 39,14 pouces anglais.

Quant à la correction due à ce que le pendule oscillait dans un espace clos, il semble évident que les parois du tube devaient nuire à la liberté du mouvement de l'air et, par suite, accroître la résistance éprouvée par le pendule quand il oscillait dans l'air; et aussi que l'accroissement de résistance causé par le tube cylindrique devait être un peu moindre que celui qu'aurait produit une enveloppe sphérique de même rayon. L'effet d'une enveloppe sphérique a été calculé dans la Section II de la première Partie; mais comme, en fin de compte, nous en sommes réduits à avoir recours à une simple appréciation, il est bien inutile de chercher une grande précision dans le calcul de l'accroissement de résistance dû à une semblable enveloppe, et nous pouvons nous borner à faire usage de l'expression déduite de la théorie ordinaire de l'Hydrodynamique. D'après cette théorie, l'accroissement du facteur k, qui résulte de la présence de l'enveloppe, est égal à $\frac{3}{2}a^3(b^3 - a^3)^{-1}$ ou, approximativement, à $\frac{3}{2}a^3 b^{-3}$, lorsque b est grand comparativement à a. L'accroissement dû à une enveloppe cylindrique à axe vertical, par conséquent perpendiculaire à la direction des oscillations de la sphère, peut être estimé aux $\frac{2}{3}$ environ de l'accroissement dû à une enveloppe sphérique de même diamètre. J'ai donc pris $+ a^3 b^{-3}$ pour la correction due à l'espace confiné, et j'ai supposé $2b = 6,5$ pouces anglais.

Le diamètre du fil employé pour les pendules n°s 1, 2, 3, 5, 6 et 7 est donné égal à $\frac{1}{70}$ de pouce environ, et celui du fil employé avec la sphère pesante de laiton n° 66 égal à 0,023 pouce à peu près. La sphère d'ivoire n° 4 était suspendue à un fil fin pesant un peu plus d'un demi-grain. Prenant ce poids d'un demi-grain et 10,5 pour poids spécifique de l'argent, nous avons, pour ce fil, $2a_1 = 0,00251$ environ. Les diamètres des trois boules de laiton employées dans le Tableau suivant sont empruntés à la page 242 du Mémoire de Baily. On y donne séparément les différentes parties dont se compose n d'après la théorie.

Résultats de Baily avec des sphères suspendues à des fils fins.

1.	2.	3.	4.						5.	6
Sphères de 1 ½ pouce.			*a.*	*b.*	*c.*	*d.*	*e.*	*f.*		
N° 1, platine.	1,44	0,01429	1	0,5	0,289	0,035	0,011	1,835	1,881	+0,046 ou +
» 2, plomb.	1,46	0,01429	1	0,5	0,285	0,035	0.011	1,831	1,871	+0,040 ou +
» 3, laiton.	1,465	0,01429	1	0,5	0,284	0,035	0,011	1,830	1,834	+0,004 ou +
» 4, ivoire..	1,46	0,00251	1	0,5	0,285	0,016	0,011	1,812	1,872	+0,060 ou +
Sphères de 2 pouces.										
N° 5, plomb.	2,06	0,01429	1	0,5	0,202	0,012	0,032	1,746	1,738	−0,008 ou −
» 6, laiton.	2,065	0,01429	1	0,5	0,202	0,012	0,032	1,746	1,751	+0,005 ou +
» 7, ivoire..	2,06	0,01429	1	0,5	0,202	0,012	0,032	1,746	1,755	+0,009 ou +
Sphère de 3 pouces.										
N° 66, laiton.	3,030	0,023	1	0,5	0,137	0,005	0,101	1,743	1,748	+0,005 ou +

Colonne 1. Numéro et nature de la boule.

» 2. Diamètre $2a$ de la boule.

» 3. Diamètre $2a_1$ du fil.

» 4. Valeur de n d'après la théorie, comprenant :

- *a.* Correction de perte de poids.
- *b.* Correction due à l'inertie de l'air, d'après la théorie ordinaire.
- *c.* Correction additionnelle due au frottement intérieur.
- *d.* Correction pour le fil.
- *e.* Correction (estimée) due à ce que l'oscillation a lieu dans un espace clos.
- *f.* Somme de toutes ces corrections.

» 5. Valeur de n d'après l'expérience.

» 6. Différence (expérience-théorie).

L'erreur moyenne des différentes déterminations de n pour une même boule était d'environ 0,01 ou 0,02, sans tenir compte des erreurs provenant de petites erreurs sur les poids spécifiques, etc. Si donc nous faisons abstraction des boules n°s 1, 2, 4, les différences entre la théorie et l'observation sont absolument insignifiantes. Cette confirmation de la théorie paraîtra bien remarquable, si l'on considère qu'elle ne disposait plus d'aucune con-

stante arbitraire, puisque $\sqrt{\mu'}$ était préalablement déterminé par les expériences faites sur des tiges cylindriques. Il se trouve que le résultat obtenu avec la boule de laiton n° 3 concorde presque exactement avec la théorie. Cependant, comme les divers résultats obtenus avec cette boule montrent quelques anomalies, il vaut mieux n'en pas tenir compte ici. La valeur de n qui répond à une sphère de 1,5 pouce, semble alors plus forte d'une petite quantité que celle qui se déduit de la théorie. En réalité, la différence est si petite, qu'on pourrait l'attribuer aux erreurs de l'observation, si ce n'était que toutes les boules donnent le même résultat. Ainsi l'erreur + 0,046 relative à la boule de platine correspond à une erreur de moins de $\frac{1}{40}$ de seconde sur l'observation d'un intervalle de temps montant à $4^{h}30^{m}$. Si l'erreur par défaut du résultat théorique, 0,04 ou 0,05, est réelle, elle peut, avec vraisemblance, être attribuée à une erreur sur la correction due au fil. On ne pourrait en faire une objection contre la théorie, car il faudra se rappeler que la théorie elle-même a indiqué que les formules généralement applicables à un long cylindre pouvaient très bien se trouver en défaut, lorsque le cylindre se réduit à une extrême finesse comme les fils employés dans les expériences.

58. Les expériences de Baily que nous venons d'examiner sont les plus importantes au point de vue de notre travail, parce qu'elles ont été faites sur des pendules de formes simples et en même temps très différentes ; mais il reste encore trois séries d'expériences, la quatorzième, la quinzième et la seizième, dans lesquelles le pendule était formé de la combinaison d'une sphère et d'une tige, de sorte qu'il est possible d'en comparer les résultats à la théorie. Les détails des expériences sont omis dans le Mémoire de Baily ; j'ai donc été obligé de calculer les durées d'oscillations d'après les formules ordinaires de la Dynamique, mais l'exactitude des nombres ainsi obtenus est certainement bien suffisante pour le but que l'on se propose. Dans tous les calculs, j'ai supposé que le cylindre se prolongeait jusqu'à l'axe de suspension et, en conséquence, j'ai ajouté 1,55 pouce (longueur de la queue du couteau) à la longueur de la tige, et j'ai ajouté au poids de la tige une fraction de son poids égale au rapport de 1,55 à la longueur totale.

Dans le cas de boules fixées aux extrémités des tiges (séries 14 et 16), le mode de calcul est le suivant. Soient l la longueur de la tige augmentée de 1,55 pouces, W_1 son poids augmenté comme il vient d'être dit, a le rayon et W le poids de la sphère, λ la longueur du pendule simple synchrone. Supposons les masses de la tige et de la sphère distribuées respectivement le long de l'axe et réunies au centre, ce qui est bien suffisamment exact pour le but que nous nous proposons, et désignons par α le rapport de a à l; nous avons, d'après la formule ordinaire,

$$(153) \qquad \lambda = \frac{\frac{1}{3}W_1 + (1+\alpha)^2 W}{\frac{1}{2}W_1 + (1+\alpha)\,W}\,l,$$

ce qui donne la durée τ de l'oscillation. La formule (148) fait connaître k, qui s'applique à la sphère, et la formule (147) donne la valeur de m, l'a de cette formule étant le rayon de la tige, d'où l'on peut tirer par interpolation, au moyen de la Table de la première Partie, la valeur de k_1 qui s'applique à la tige. Soient Δk, Δk_1 les corrections qui doivent être apportées à k et k_1 en raison de ce que le pendule oscille dans un espace clos, et soient S_1 et S les poids spécifiques respectifs de la tige et de la sphère ; on a, d'après les formules (149) et (150),

$$(154) \qquad n - 1 = \frac{\frac{1}{3}(k_1+\Delta k_1)\frac{W_1}{S_1} + (1+\alpha)^2(k+\Delta k)\frac{W}{S}}{\frac{1}{3}W_1 + (1+\alpha)^2 W} \times \frac{\frac{1}{2}W_1 + (1+\alpha)W}{\frac{1}{2}\frac{W_1}{S_1} + (1+\alpha)\frac{W}{S}}.$$

Le premier des deux facteurs réunis par le signe $\times$ dans cette équation est égal à $\sigma^{-1}l'l^{-1}$, et si nous avons besoin de calculer le poids de l'air que l'on peut concevoir attaché au centre de gyration du pendule pour tenir compte de l'inertie de l'air, nous n'avons qu'à multiplier ce facteur par σ et par le poids total du pendule. Le Tableau suivant renferme la comparaison de la théorie et de l'expérience dans le cas de la quatorzième série. Les tiges dont il est ici question sont les mêmes que celles qui formaient les pendules nos 21, 43 et 44, et les boules sont les trois boules de laiton des nos 3, 5 et 66. Il ressort de la page 225 du Mémoire de Baily que les résultats sont tous réduits à la pression et à la tempéra-

ture normales, dans l'hypothèse que l'influence de l'air sur la durée de l'oscillation est proportionnelle à sa densité. La théorie développée dans mon Mémoire montre que ceci n'est vrai que si μ' est constant, ce que l'on n'est en droit de supposer que lorsque la pression seule varie. Quoi qu'il en soit, il ne peut résulter aucune erreur sensible de ce mode de réduction, parce que la différence de densité dans un couple d'expériences ne différait pas beaucoup de la densité de l'air à la pression et à la température normale. Cette pression et cette température normales adoptées étaient 29,9218 pouces anglais de mercure et 32°F., et le poids spécifique de l'air dans ces conditions $\frac{1}{770}$ de celui de l'eau, de sorte que, dans les calculs de la théorie, il faut supposer $\sigma^{-1} = 770$.

Si w est le poids total du pendule, w' celui de l'air que nous devons supposer attaché au pendule en son centre de gyration afin de représenter l'effet de l'inertie de l'air, S le poids spécifique *oscillant* du pendule, les effets de la perte de poids et de l'inertie sont entre eux comme σS^{-1} est à $w' w^{-1}$; mais ils sont aussi l'un à l'autre dans le rapport de 1 à $\mathfrak{n} - 1$, d'après la définition même du rapport $\mathfrak{n}$ et, par conséquent,

$$w' = (\mathfrak{n} - 1)\frac{\sigma}{S} w, \tag{155}$$

formule qui peut servir à calculer w' dès que $\mathfrak{n}$ est connu.

Résultats de Baily avec des sphères fixées aux extrémités de longues tiges.

Numéro et nature du pendule.			Valeur de $\mathfrak{n}$.		
			théorique.	expérimentale.	Différence.
45, boule de	po 1,5,	tige de cuivre...	2,525	2,458	$-0,067$ ou $-\frac{1}{48}$
46, »	2,	même tige......	2,202	2,234	$+0,032$ ou $+\frac{1}{69}$
47, »	3,	même tige......	1,957	1,873	$-0,084$ ou $-\frac{1}{23}$
48, »	1,5,	tige de laiton...	2,375	2,356	$-0,019$ ou $-\frac{1}{125}$
49, »	2,	même tige......	2,060	1,982	$-0,078$ ou $-\frac{1}{26}$
50, »	3,	même tige......	1,631	1,933?	$+0,302$?
51, »	1,5,	tige d'acier.....	2,099	2,344?	$+0,245$?
52, »	2,	même tige......	1,920	1,793	$-0,127$ ou $-\frac{1}{15}$
53, »	3,	même tige......	1,781	1,759	$-0,022$ ou $-\frac{1}{81}$

Numéro et nature du pendule.			Poids de l'air adhérent, en grains, théorique.	expérimental.	Différence.
45, boule de	po 1,5,	tige de cuivre...	4,863	4,564	−0,299 ou − $\frac{1}{16}$
46,	» 2,	même tige......	5,005	5,076	+0,071 ou + $\frac{1}{70}$
47,	» 3.	même tige......	7,071	6,425	−0,646 ou − $\frac{1}{11}$
48,	» 1,5,	tige de laiton...	1,447	1,417	−0,030 ou − $\frac{1}{48}$
49,	» 2,	même tige......	2,135	1,973	−0,162 ou − $\frac{1}{13}$
50,	» 3,	même tige......	4,411	4,868?	+0,457?
51,	» 1,5,	tige d'acier.....	0,682	0,834?	+0,152?
52,	» 2,	même tige......	1,457	1,259	−0.198 ou − $\frac{1}{7}$
53,	» 3,	même tige......	3,742	3,670	−0,072 ou − $\frac{1}{52}$

Relativement aux deux expériences marquées d'un point d'interrogation, Baily fait cette remarque : « Les deux expériences faites avec les pendules nos 50 et 51 sont très peu satisfaisantes, et sont marquées telles dans mon journal d'observations. Mon intention était, en conséquence, de les répéter ; mais je l'oubliai jusqu'au moment où il était trop tard pour le faire. Je propose de les rejeter entièrement. » Si l'on fait abstraction de ces deux expériences, on voit que les différences entre la théorie et l'observation sont fort petites, surtout si l'on tient compte d'une difficulté spéciale à cette série d'expériences, résultant de la fréquence des coïncidences du pendule avec l'horloge de temps moyen.

59. En raison de la difficulté que Baily éprouva à obtenir des résultats précis avec de longues tiges portant des boules, il fit couper les tiges de laiton et d'acier à très peu près au centre d'oscillation, et ayant retranché 1 pouce de chacun des deux morceaux, il fixa la boule à l'endroit où les tiges avaient été coupées. Les résultats ainsi obtenus forment la quinzième série d'expériences. Il enleva ensuite les morceaux inférieurs des tiges, et obtint les résultats de la seizième série. Je donnerai d'abord le calcul de cette dernière, attendu que les formules à employer sont exactement les mêmes que pour la quatorzième série. Les expériences appartenant à cette quinzième série, dans lesquelles on fit osciller les boules à l'extrémité de fils de fer, ont déjà été calculées sous le titre de *Boules suspendues à des fils fins*.

Résultats de Baily avec des boules fixées à l'extrémité des tiges courtes.

Numéro et nature du pendule.				Valeur de n théorique.	Valeur de n expérimentale.	Différence.
		po				
60,	sphère de	1,5,	tige de laiton...	2,149	2,198	+0,049 ou + $\frac{1}{44}$
61,	»	2,	même tige.....	1,879	1,901	+0,022 ou + $\frac{1}{85}$
62,	»	3,	même tige.....	1,787	1,830	+0,043 ou + $\frac{1}{42}$
63,	»	1,5,	tige d'acier....	1,960	1,904	—0,056 ou — $\frac{1}{35}$
64,	»	2,	même tige.....	1,796	1,785	—0,011 ou — $\frac{1}{163}$
65,	»	3,	même tige....	1,758	1,779	+0,021 ou + $\frac{1}{84}$

Numéro et nature du pendule.				Poids de l'air adhérent théorique.	Poids de l'air adhérent expérimental.	Différence.
		po				
60,	sphère de	1,5,	tige de laiton...	1,011	1,047	+0,036 ou — $\frac{1}{28}$
61,	»	2,	même tige.....	1,619	1,513	—0,106 ou — $\frac{1}{15}$
62,	»	3,	même tige.....	3,970	4,202	+0,232 ou + $\frac{1}{17}$
63,	»	1,5,	tige d'acier....	0,570	0,537	—0,033 ou — $\frac{1}{16}$
64,	»	2,	même tige.....	1,239	1,227	—0,012 ou — $\frac{1}{103}$
65,	»	3,	même tige....	3,609	3,720	+0,111 ou + $\frac{1}{32}$

Ici encore, les différences entre la théorie et l'expérience sont fort petites. Dans le cas du pendule n° 61, les deux nombres de Baily 1,901 et 1,513 ne sont pas d'accord entre eux, puisqu'ils ne satisfont pas à la formule (155).

60. Le Tableau suivant contient les valeurs de τ, k et k_1, déduites des données des expériences, et employées dans les calculs dont les deux Tableaux précédents montrent les résultats. On l'a inséré ici, d'abord pour faciliter la comparaison des conditions des diverses expériences, puis pour permettre de calculer à nouveau une quelconque des expériences et de découvrir quelque erreur numérique que j'aurais pu commettre. Je dois faire remarquer que je n'ai pas, en général, revu mes calculs, sauf le cas où il y avait une erreur évidente, mais que chaque opération successive, addition, soustraction, multiplication ou division, a été tou-

jours vérifiée immédiatement après avoir été effectuée. Je n'ai pas cru nécessaire de soumettre à la même vérification les logarithmes ou antilogarithmes pris dans les Tables.

Valeurs de τ, k et k_1 employées dans le calcul des résultats théoriques des deux Tableaux précédents.

		Tiges longues				Tiges courtes			
Sphère.	Tige.	n^{os}.	τ.	k.	k_1.	n^{os}.	τ.	k.	k_1.
po 1,5	Cuivre	45	1,090	0,7968	1,951	»	»	»	»
2	Cuivre	46	1,158	0,7170	1,981	»	»	»	»
3	Cuivre	47	1,227	0,6523	2,010	»	»	»	»
1,5	Laiton	48	1,155	0,8055	3,222	60	0,9517	0,7772	3,012
2	Laiton	49	1,198	0,7207	3,264	61	0,9806	0,7005	3,042
3	Laiton	50	1,222	0,6520	3,288	62	0,9982	0,6373	3,062
1,5	Acier	51	1,190	0,8099	7,272	63	0,9868	0,7824	6,649
2	Acier	52	1,199	0,7208	7,299	64	0,9954	0,7021	6,679
3	Acier	53	1,231	0,6525	7,396	65	1,0030	0,6377	6,714

Les corrections dues à l'influence de l'espace clos sont, pour les boules (Δk), 0,0115, 0,0321 et 0,1013; et pour les tiges (Δk_1), 0,009, 0,002 et 0,000. Il faut ajouter ces corrections aux valeurs de k et k_1 du Tableau avant de procéder aux calculs.

61. Dans la quatorzième série d'expériences, le poids de l'air adhérent dû aux boules seules a été calculé par Baily en soustrayant du poids total, tel qu'il est donné par l'observation, le poids dû aux tiges tel qu'il est donné par la treizième série d'expériences, en tenant compte du changement de poids qui résulte du changement de position du centre de gyration, point auquel l'air est supposé attaché. D'après la théorie, ce procédé de calcul n'est pas légitime, en ce que le poids d'air entraîné par une tige est fonction de la durée d'oscillation, laquelle change quand une sphère est fixée à l'extrémité de la tige. Mais, dans la quinzième série, les boules ne modifiaient pas sensiblement la durée de l'oscillation, puisqu'elles avaient été placées entre les deux morceaux des tiges au centre d'oscillation de celles-ci; dans ce cas donc, le procédé de calcul est correct. Par suite, je crois que, dans la quinzième série, la comparaison de la théorie et de l'expérience ne demande que la comparaison des poids d'air dus aux boules

seules, tels qu'ils ont été calculés par Baily, aux poids calculés conformément à la théorie à l'aide de la valeur adoptée pour $\sqrt{\mu'}$. J'ai donné à part la valeur du poids correspondant à la correction de l'influence de l'espace clos, afin de mettre le lecteur en état de se former une idée de l'influence que peut avoir sur les résultats l'incertitude relative à la grandeur de cette correction.

Poids de l'air entraîné par les sphères seules, déduit des résultats obtenus par Baily, les sphères étant fixées au centre d'oscillation des tiges longues.

THÉORIE.

	Sphères de		
	$1\frac{1}{2}$ pouce.	2 pouces.	3 pouces.
Dans l'air libre................	0,431	1,060	3,002
Corr. addit. dû à l'espace clos.	0,006	0,048	0,476
Somme.........	0,437	1,108	3,478

EXPÉRIENCE.

D'après l'expérience.	Sphères de		
	$1\frac{1}{2}$ pouce.	2 pouces.	3 pouces.
Avec la tige de laiton.........	0,446	1,180	3,382
Avec la tige d'acier...........	0,405	1,039	3,371
Moyenne........	0,425	1,109	3,377
Différ., théorie — expérience...	−0,012	+0,001	−0,101
Différence en fraction du tout..	$-\frac{1}{36}$	$+\frac{1}{1108}$	$-\frac{1}{34}$

62. Je passe maintenant aux expériences de Bessel décrites dans son Mémoire intitulé : *Untersuchungen über die Länge des einfachen Secundenpendels,* qui est imprimé dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour l'année 1826 [1]. L'objet de ce travail était la détermination de la longueur du pendule à secondes par une nouvelle méthode, qui consistait à faire osciller la même boule à l'extrémité de deux fils de longueurs différentes, la différence des longueurs étant mesurée avec une extrême précision. Dans le calcul, la longueur absolue du pendule simple synchrone du pendule composé le plus long ou le plus court était considérée comme inconnue; mais on connaissait la différence des deux, et cette différence, combinée avec les durées observées

[1] *Voir* la traduction de ce Mémoire, t. IV de ce Recueil, p. 124, et t. V, p. 1.

des oscillations, suffit à la détermination de la quantité cherchée. Il n'y aurait eu rien de plus à demander si les oscillations avaient eu lieu dans le vide; mais, puisqu'elles se faisaient dans l'air, il fallait introduire une correction pour les ramener au vide. Comme il est nécessaire de tenir compte de l'inertie de l'air, aussi bien que de la perte de poids qu'il produit, pour réduire les observations au vide, Bessel a cherché par expérience la valeur du facteur k, dont nous avons déjà expliqué la signification. La valeur de ce facteur, comme Bessel l'a remarqué, doit dépendre de la forme du corps; mais Bessel ne paraît pas, au moins dans son premier Mémoire, avoir soupçonné qu'elle pouvait dépendre aussi de la durée d'oscillation, et, en conséquence, il la supposa la même pour le pendule long et pour le pendule court. Lorsqu'on introduit le facteur k, l'équation déduite de la différence connue des longueurs des deux pendules simples contient deux inconnues, savoir k et la longueur du pendule à secondes. Pour obtenir une seconde équation, Bessel fit une autre série d'expériences, dans lesquelles la boule de laiton était remplacée par une boule d'ivoire, ayant autant que possible le même diamètre. Les résultats obtenus avec cette boule d'ivoire fournirent une seconde équation, dans laquelle k entrait avec un coefficient beaucoup plus grand, en raison de la légèreté de l'ivoire comparé au laiton. Les deux équations déterminaient les deux quantités inconnues.

Soient λ la longueur du pendule à secondes, t_1 et t_2 les durées d'oscillation de la sphère de laiton avec le fil court et avec le fil long, l_1 et l_2 les longueurs des pendules simples correspondants, corrigées de toutes les influences autres que celle de l'inertie de l'air, m la masse de la boule, m_1 celle du fluide déplacé; alors

$$\lambda t_1^2\left(1+\frac{m_1}{m}k\right)^{-1}=l_1,$$

ou, puisque m_1 est si petit que nous pouvons négliger m_1^2,

$$\lambda t_1^2\left(1-\frac{m_1}{m}k\right)=l_1.$$

Le long pendule fournit une équation semblable, et le résultat obtenu avec la boule de laiton est

$$(156)\qquad \lambda(t_2^2-t_1^2)\left(1-\frac{m_1}{m}k\right)=l_2-l_1,$$

$l_2 - l_1$ étant une quantité connue avec précision. La boule d'ivoire donne de la même manière l'équation

(157) $$\lambda(t_2'^2 - t_1'^2)\left(1 - \frac{m_1}{m'}k\right) = l_2' - l_1',$$

où les lettres accentuées se rapportent à cette boule. L'équation qui déterminera k s'obtient par l'élimination de λ entre ces deux équations.

Maintenant, en vertu de la théorie que j'ai exposée, k, en réalité, a deux valeurs différentes pour le long pendule et pour le court. Soit k_1 la valeur relative au plus petit, k_2 celle qui convient au long pendule avec la boule de laiton, k_1' et k_2' les valeurs correspondantes pour la boule d'ivoire. Alors

$$\lambda t_1^2\left(1 - \frac{m_1}{m}k_1\right) = l_1, \qquad \lambda t_2^2\left(1 - \frac{m_1}{m}k_2\right) = l_2,$$

et, par conséquent,

(158) $$l_2 - l_1 = \lambda t_2^2\left(1 - \frac{m_1}{m}k_2\right) - \lambda t_1^2\left(1 - \frac{m_1}{m}k_1\right).$$

Dans l'équation qui résulte de l'élimination de λ entre (156) et (157), substituons les valeurs de $l_2 - l_1$ et de $l_2' - l_1'$ déduites de (158) et de l'équation semblable établie pour la boule d'ivoire. Le résultat sera

$$(t_2^2 - t_1^2)\left(1 - \frac{m_1}{m}k\right)\left[t_2'^2\left(1 - \frac{m_1}{m'}k_2'\right) - t_1'^2\left(1 - \frac{m_1}{m'}k_1'\right)\right]$$
$$= (t_2'^2 - t_1'^2)\left(1 - \frac{m_1}{m'}k\right)\left[t_2^2\left(1 - \frac{m_1}{m}k_2\right) - t_1^2\left(1 - \frac{m_1}{m}k_1\right)\right].$$

Cette équation est de la forme

$$P + Qm_1 + Rm_1^2 = P' + Q'm_1 + R'm_1^2.$$

$P = P'$, Rm_1^2 et $R'm_1^2$ peuvent être négligés, de sorte que l'équation se réduit à

$$Q = Q'.$$

Il n'est pas nécessaire de faire plus longtemps une distinction entre t_2 et t_2', ni entre t_1 et t_1', qui peuvent être regardés comme égaux. Par suite, le rapport de m à m' est égal à celui de S à S', S et S' étant les poids spécifiques des boules de laiton et d'ivoire. Substituons dans l'équation $Q = Q'$, et résolvons par rapport à k,

nous obtiendrons

$$(159)\qquad k = \frac{t_2^2(Sk'_2 - S'k_2) - t_1^2(Sk'_1 - S'k_1)}{(t_2^2 - t_1^2)(S - S')}.$$

Cette équation contient la définition algébrique de la fonction k dont la valeur numérique est déterminée en combinant, à la manière de Bessel, les résultats obtenus avec les quatre pendules. Puisque l'équation est linéaire par rapport à k, k_1, ..., nous pouvons considérer séparément les différentes parties dont ces quantités se composent et additionner les résultats. Pour la partie qui se rapporte aux boules, supposées suspendues à des fils infiniment fins, nous avons $k'_2 = k_2$ et $k'_1 = k_1$, puisque les deux boules avaient même rayon, ou que la différence des rayons était insensible au point de vue de nos recherches. Nous tirons donc de (159)

$$(160)\qquad k = \frac{t_2^2 k_2 - t_1^2 k_1}{t_2^2 - t_1^2},$$

ce qui donne

$$(161)\qquad \frac{k - k_1}{t_2^2} = \frac{k - k_2}{t_1^2} = \frac{k_2 - k_1}{t_2^2 - t_1^2}.$$

Comme $t_2 > t_1$ et $k_2 > k_1$, les équations (161) montrent que la valeur de k déterminée par la méthode de Bessel est plus grande que le facteur qui se rapporte au pendule court, qui était à peu près un pendule à secondes, et même plus grande que celle qui répond au long pendule, ainsi qu'on l'a déjà remarqué dans l'art. 6.

Si k_s est le facteur relatif à l'une ou l'autre sphère faisant son oscillation en une seconde, et si l'on peut négliger l'effet de l'emprisonnement de l'air, on déduit de la formule (148),

$$k_1 - \frac{1}{2} : k_2 - \frac{1}{2} : k_s - \frac{1}{2} :: t_1^{\frac{1}{2}} : t_2^{\frac{1}{2}} : 1.$$

Dans les expériences de Bessel, $t_1 = 1{,}001$, $t_2 = 1{,}721$ et $2a = 2{,}143$ pouces anglais. Nous tirons donc de l'une ou l'autre des équations (160) ou (161), $k = 0{,}786$, en substituant à $\sqrt{\mu'}$ sa valeur $0{,}116$. La valeur du facteur k_s, relative à une boule de même diamètre oscillant en une seconde, est seulement $0{,}694$, et k_1 peut être regardé comme égal à k_s. La formule (148) donne $k_2 = 0{,}755$.

63. Nous avons maintenant à déterminer la correction relative au fil. L'effet de l'inertie de l'air mis en mouvement par le fil a été complètement négligé par Bessel, et, en fait, il eût été tout à fait insensible, si les deux parties de la correction due à l'inertie pour le fil et pour la boule eussent été entre elles dans le même rapport à peu près que les parties de la correction due à la perte de poids. Mais Baily a été conduit à conclure de ses expériences que l'effet du fil n'était probablement pas tout à fait insignifiant, et la théorie que j'ai exposée dans ce Mémoire conduit, nous l'avons vu, à ce résultat, que le facteur $\mathfrak{n}$ est très grand dans le cas d'un fil très fin.

La sphère d'ivoire, dans les expériences de Bessel, était suspendue à un fil plus fin que celui de la boule de laiton. C'est pour cette raison que je n'ai pas supposé d'abord $k'_1 = k_1$ et $k'_2 = k_2$. Soient Δk, Δk_1, ..., les corrections dues au fil. Les valeurs de Δk_1, Δk_2, $\Delta k'_1$, $\Delta k'_2$ peuvent se déduire de la formule (151), dans laquelle il faut se rappeler que λ désigne la longueur du pendule simple synchrone, et non, comme dans la notation de Bessel, la longueur du pendule à secondes. Bessel rapporte (t. V de ce Recueil, p. 33) que le fil employé avec la sphère de métal pesait 10,95 grains de Prusse dans le cas du long pendule, et 3,58 grains dans le cas du pendule court. Cela donne 7,37 grains pour le poids d'une toise ou 72 pouces français. Le poids d'une toise du fil employée avec la boule d'ivoire était 6,28 — 2,04 ou 4,24 grains (p. 44). Le poids spécifique du fil était 7,6 (t. IV, p. 164) et le poids d'une ligne cubique (française) d'eau est à peu près 0,1885 grains. De ces données, il résulte que les rayons des fils étaient, en pouce anglais, 0,003867 et 0,002933. La formule (147) donne $\mathfrak{m}$, et l'on a ensuite L par (152). Les longueurs des pendules simples synchrones étaient environ 39,20 pouces pour le pendule court, et 116,94 pour le plus long. En substituant ces valeurs numériques, nous tirons de (151), k_1 étant égal à $\mathfrak{n}_1 - 1$ et k_2 à $\mathfrak{n}_2 - 1$,

$$\Delta k_1 = 0,0107, \qquad \Delta k_2 = 0,0286, \qquad \Delta k'_1 = 0,0090, \qquad \Delta k'_2 = 0,0244.$$

Les poids spécifiques des deux boules étaient environ 8,190 et 1,794, d'où nous tirons, d'après (159), $\Delta k = 0,0308$, ou 0,031 à peu près.

La valeur de k, déduite par Bessel de ses expériences, était

0,9459, à peu près 0,946; dans un Mémoire ultérieur, il la porta à 0,956. Dans ce Mémoire, il admet la possibilité de deux valeurs différentes de cette constante pour le pendule long et pour le pendule court, et il remarque, avec juste raison, qu'il n'en résulterait aucune erreur sensible dans la longueur du pendule à secondes déterminée par sa méthode, mais que le facteur k serait particulier au système des deux pendules.

Voici le résultat de la comparaison de la théorie et de l'expérience dans le cas des expériences de Bessel sur les oscillations d'une boule dans l'air :

Valeur de k relative au système d'un long pendule et d'un pendule court, déterminée expérimentalement par Bessel.	0,956
Valeur de k déduite de la théorie, comprenant la correction due au fil, mais non celle qui dépend de ce que l'oscillation a lieu en vase clos..................................	0,817
Différence..................................	+0,139

Je ne trouve pas dans le Mémoire de Bessel l'indication exacte de la distance de la sphère au fond de la boîte dans laquelle elle oscillait; mais, si j'en juge par le dessin de l'ensemble de l'appareil donné dans la *Pl. I* et par la comparaison des *fig.* 2 et 3 de la *Pl. II*, (*Pl. VI* et *VII* du t. IV de ce Recueil), elle doit avoir été fort petite, c'est-à-dire une petite fraction du rayon de la boule ([1]).

S'il en était ainsi, bien que le calcul exact de la correction due à l'emprisonnement de l'air soit un problème d'une extrême difficulté, on peut faire voir par des considérations théoriques que cette correction ne serait nullement insensible, si bien qu'elle pourrait expliquer totalement ou en partie la différence +0,139 des résultats de l'expérience et de la théorie. Mais il n'est pas improbable non plus, pour une raison qui a déjà été dite, que la correction théorique relative au fil n'est pas absolument exacte.

([1]) La mesure de l'une ou l'autre des *fig.* 5 ou 6 de la *Pl. II* donne 1,53 pouce anglais pour la distance du centre de la boule à la surface de la large barre de fer qui formait le fond de l'appareil, la surface de la barre étant supposée bien verticale; et la mesure de la *fig.* 2 donnant 2,06 pouces pour le diamètre de la sphère, il s'ensuit que la distance de la surface de la sphère à la surface de la barre était à peine égale à la moitié du rayon de la boule.

64. Les expériences faites par Bessel sur une boule oscillant dans l'eau viendront mieux à leur place après la discussion de quelques expériences de Coulomb, que je vais maintenant aborder. Ces expériences sont rapportées dans un Mémoire intitulé : *Expériences destinées à déterminer la cohérence des fluides et les lois de leur résistance dans les mouvements très lents*, qui se trouve dans le troisième Volume des *Mémoires de l'Institut*, p. 246 (1). Je prends d'abord les expériences relatives aux oscillations de disques suspendus dans l'eau, leurs surfaces étant horizontales. Dans ces expériences, le disque sur lequel on opérait était attaché à l'extrémité inférieure d'un cylindre vertical de cuivre, d'un peu moins d'un demi-pouce de diamètre, dont l'axe passait par le centre du disque. Ce cylindre était suspendu à un fil fin fixé à son extrémité supérieure. La partie inférieure du cylindre, avec le disque qui y était attaché, était immergée dans l'eau, et le disque se trouvait à une profondeur de 3^{cm} à 5^{cm} au-dessous de la surface du liquide. La base supérieure du cylindre portait un disque métallique gradué, sur lequel on pouvait lire l'arc d'oscillation, et qui, en raison de sa forme et de son poids, déterminait presque à lui seul l'inertie du système, de sorte que la durée d'oscillation dans les différentes expériences était à peu près la même. Les observations se faisaient comme il suit. On tournait très lentement le système tout entier en appuyant sur les bras du disque gradué, avec la précaution de ne pas déranger le fil de suspension de sa position verticale. On lisait sur la graduation l'angle dont on avait fait tourner le système, ou plutôt on le faisait tourner d'un angle déterminé à l'avance, puis on l'abandonnait à lui-même, et on lisait de nouveau l'arc après un certain nombre d'oscillations. C'était donc le décrément de l'arc d'oscillation que l'on observait; on déterminait sans doute aussi la durée de l'oscillation, mais seulement d'une manière approximative, afin de pouvoir évaluer une quantité auxiliaire nécessaire au calcul des observations. En fait, on voit aisément que les expériences n'étaient pas très propres à déterminer l'influence du fluide sur la durée de l'oscillation. Le décrément de l'arc ainsi déterminé devait être

(1) Ce Mémoire est reproduit dans le Tome I de la *Collection de Mémoires relatifs à la Physique*, publiés par la Société de Physique, p. 333.

corrigé de l'effet de l'imparfaite élasticité du fil, et de la résistance de l'air contre le disque gradué, et enfin de celle de l'eau contre la portion immergée du cylindre de cuivre. La valeur de la correction s'obtenait en répétant l'observation après avoir enlevé le disque inférieur.

Les expériences ont montré d'abord que, avec le même disque immergé, l'amplitude de l'oscillation décroissait en progression géométrique; secondement que, avec différents disques, le moment de la force résistante était proportionnel à la quatrième puissance du rayon. De ces lois, Coulomb conclut que chaque petit élément d'un quelconque des disques éprouve une résistance qui varie comme le produit de l'aire de l'élément par sa vitesse linéaire. On doit observer que Coulomb n'était autorisé par ses expériences à affirmer l'exactitude de cette loi que dans le cas d'oscillations d'une période donnée, puisque la durée de l'oscillation était à peu près la même dans toutes les expériences.

Soient

a le rayon du disque immergé;
τ la durée de l'oscillation;
θ le déplacement angulaire du disque, mesuré à partir de sa position moyenne;
I le moment d'inertie de tout le système;

et soit $\frac{1}{1-m}$ le rapport dans lequel l'arc d'oscillation diminue à chaque oscillation. D'après la formule (15), nous avons

$$e^{-n\beta t},$$

pour le facteur qui exprime le rapport de l'arc d'oscillation au bout du temps t à l'arc initial. A la fin d'une seule oscillation, $t=\tau$, et la valeur du facteur précédent est $1-m$, valeur donnée par l'observation. Remplaçant β par sa valeur, dans laquelle $M\gamma^2 = I$ et $n\tau = \pi$, nous obtenons

$$\log_e(1-m) = -\frac{\rho a^4}{I}\sqrt{\frac{\pi^3\mu'\tau}{8}}. \tag{162}$$

Soient T la durée de l'oscillation, et I_0 le moment d'inertie, lorsque le disque inférieur a été enlevé : $I = I_0\tau^2T^{-2}$. Si donc M est la masse et R le rayon du large disque gradué, nous avons

$I_0 = \frac{1}{2}MR^2$, en négligeant, comme le faisait Coulomb, l'inertie rotatoire du cylindre de cuivre. En substituant dans (162), nous avons

$$(163)\qquad \log_e(1-m)^{-1} = 2^{-\frac{1}{2}}\pi^{\frac{3}{2}}\rho\mu'^{\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{3}{2}}T^2a^4R^{-2}M^{-1}.$$

Soit W le poids du disque en grammes. La masse du disque est égale à celle de W centimètres cubes d'eau ou 1000 W millimètres cubes. Donc $M = 1000\rho W$, le millimètre étant pris pour unité de longueur. Substituant dans (163), et résolvant par rapport à $\sqrt{\mu'}$, nous aurons

$$(164)\quad \sqrt{\mu'} = 1000 \times 2^{\frac{1}{2}}\log_e 10.\pi^{-\frac{3}{2}}WR^2T^{-2}a^{-4}\tau^{\frac{3}{2}}\log_{10}(1-m)^{-1},$$

et les différentes expériences doivent donner la même valeur de $\sqrt{\mu'}$.

Le poids du disque était de 1003^{gr}, et son diamètre 271^{mm}; il faisait quatre oscillations en quatre-vingt-onze secondes. Ainsi $W = 1003$, $R = 135,5$, $T = 22,75$. Les trois derniers facteurs du second membre de (164) varient d'une expérience à l'autre. Après avoir fait les expériences avec trois disques de différents rayons attachés au cylindre de cuivre, Coulomb fit une autre série sans rien attacher à ce cylindre, pour éliminer l'effet de l'imparfaite élasticité du fil. Le Tableau suivant contient les données fournies par les expériences, en même temps que la valeur de μ' qui se déduit de chacune d'elles. Cette dernière valeur a été réduite en décimales du pouce anglais, en comprenant le logarithme $\bar{2},5952$ du rapport du millimètre au pouce dans le logarithme de la partie constante du second membre de l'équation (164).

Détermination de la valeur de $\sqrt{\mu'}$ pour l'eau d'après les expériences de Coulomb sur le décrément de l'arc d'oscillation de disques oscillant dans leur propre plan sous l'action de la force de torsion.

Numéros.	Diamètre du disque en millimètres.	Durée de 4 oscillations 4τ.	$\log_{10}(1-m)^{-1}$.	Valeur résultante de $\sqrt{\mu'}$ en pouces.
1.........	195	97	0,0568	0,05519
2.........	140	92	0,021	0,05716
3.........	119	91	0,0135	0,05436
4.........	0	91	0,0058	»

Pour corriger les résultats des trois premières expériences de l'influence de l'imparfaite élasticité du fil, Coulomb calculait les valeurs de m données par les quatre expériences, et soustrayait la valeur donnée par la quatrième de chacune des trois autres. Mais il est à la fois plus commode et plus exact de retrancher la valeur de $\log(1-m)^{-1}$ donnée par la quatrième expérience de celles données par chacune des autres. Car si

$$-2c\frac{d\theta}{dt}, \quad -2c'\frac{d\theta}{dt}$$

sont les moments de deux forces, variant chacune comme la vitesse, divisés par le moment d'inertie, les facteurs par lesquels il faut multiplier l'arc initial d'oscillation pour avoir l'arc à la fin du temps t, d'abord lorsque les deux forces agissent ensemble, puis lorsque la seconde agit seule, sont respectivement

$$e^{-(c+c')t}, \quad e^{-c't},$$

et cela que le temps t soit grand ou petit. D'après cela, si nous retranchons le logarithme du second facteur de celui du premier, nous obtiendrons le logarithme du facteur dû à l'action de la première force seule. Mais si nous mettons chaque facteur sous la forme $1-m$, et si nous retranchons l'm du second facteur de l'm du premier, nous n'obtiendrons pas l'm dû à la première force seule, à moins que t ne soit assez petit pour permettre de négliger les carrés de ct et $c't$, ou au moins le produit $ct.c't$. En réalité, quand $t=\tau$, les quantités m sont suffisamment petites pour qu'on puisse les traiter à la manière de Coulomb sans erreur sensible, puisque les valeurs corrigées de $\log(1-m)$, obtenues par les deux procédés, ne différeraient que par la quatrième décimale.

Les nombres donnés dans la dernière colonne du Tableau qui précède ont été calculés par la formule (164), en substituant pour $\log(1-m)^{-1}$ les nombres trouvés dans les trois premières lignes de la quatrième colonne, corrigés en les diminuant de 0,0058. La moyenne des trois résultats est 0,0557, mais les trois équations n'ont pas la même valeur pour la détermination de $\sqrt{\mu'}$. Car les trois nombres d'où se déduit $\sqrt{\mu'}$ sont 0,0510, 0,0152, 0,0077, et

une erreur donnée sur le premier de ces nombres produirait sur $\sqrt{\mu'}$ une erreur moindre que celle qui résulterait de la même erreur sur le deuxième, et bien moindre que celle que produirait la même erreur sur le troisième. Si nous multiplions les trois valeurs de $\sqrt{\mu'}$ respectivement par 510, 152 et 77, et si nous divisons la somme des produits par $510 + 152 + 77$, nous obtenons 0,05551. Nous pouvons donc prendre 0,0555 comme résultat des expériences. Avec cette valeur de $\sqrt{\mu'}$, nous avons :

	Dans le n° 1.	Dans le n° 2.	Dans le n° 3.
$\log(1-m)^{-1}$ d'après l'expérience.	0,0568	0,021	0,0135
d'après la théorie...	0,0571	0,0206	0,0137
Différence......	−0,0003	+0,0004	−0,0002

65. Cet accord des résultats théoriques et expérimentaux n'est pas en réalité une preuve bien frappante de l'exactitude de la théorie. Car, en fait, la théorie n'est engagée dans le résultat qu'en ceci, que celui-ci prouve que la résistance éprouvée par un petit élément donné du disque oscillant dans une période déterminée varie comme la vitesse linéaire; la différence des périodes dans les expériences de Coulomb est en effet si petite que les effets qui pourraient en résulter sont confondus avec les erreurs d'observations. Cette loi est tellement simple, qu'elle pourrait résulter de théories différant dans des points essentiels de celle qui a été développée dans ce Mémoire. Mais si l'on trouve que la valeur numérique de $\sqrt{\mu'}$ déterminée par les expériences de Coulomb sur des disques donne des résultats en accord avec la théorie dans des cas entièrement différents, alors la théorie recevra une éclatante confirmation. Avant de passer à la discussion d'autres expériences, il est bon d'appeler l'attention sur une ou deux petites corrections qu'il faut apporter à la valeur trouvée de $\sqrt{\mu'}$.

En premier lieu, le résultat obtenu dans l'art. 8 n'est qu'approché, l'approximation dépendant de la circonstance que le diamètre du corps tournant est grand par rapport à une certaine longueur déterminée par les valeurs de μ' et de τ. Dans le cas particulier où le corps en rotation est un disque circulaire, il arrive que la solution approchée satisfait exactement aux équations gé-

nérales, excepté en ce qui regarde la terminaison brusque du disque sur son bord ([1]). Par suite de cette terminaison brusque, les anneaux de fluide au voisinage immédiat du bord sont plus retardés par l'action du fluide environnant qu'ils ne le seraient si le disque se continuait, et, par suite, la résistance éprouvée par le disque au voisinage immédiat de son bord est en réalité un peu plus grande que celle que donne la formule. Je n'ai pas cherché à déterminer la correction due à cette cause, mais elle serait sans doute fort petite.

En second lieu, la formule (15) s'applique à une succession indéfinie d'oscillations; Coulomb, au contraire, ne déviait le disque que de l'angle le plus grand qu'il voulait observer, et, au lieu de laisser s'effectuer une ou deux oscillations avant de commencer l'observation, prenait pour arc initial celui dont le disque avait été déplacé à la main. Il est probable qu'il maintenait quelques instants le disque dans cette position, de sorte que le fluide avait le temps de rentrer à peu près au repos. S'il en était ainsi, la valeur résultante de $\sqrt{\mu'}$ serait un peu trop petite, comme il est facile de le voir. Car, dans le cours d'une série indéfinie d'oscillations, le disque, dans son mouvement dans un sens, entraîne avec lui une certaine quantité de fluide, qui, en conséquence de son inertie, tend à conserver ce mouvement. Lors donc que le disque, ayant atteint son déplacement maximum dans le sens positif, commence à revenir en arrière, il trouve le fluide animé d'un mouvement qui s'oppose à son retour, et éprouve par suite une résistance plus grande que s'il partait de la même position au sein d'un fluide en repos. En fait, il ressort de l'expression de G dans l'art. 8 que le moment de la résistance s'annule, en passant du négatif au positif, non pas à l'instant où le disque a atteint la fin de son excursion dans le sens positif, mais à une époque antérieure du huitième de la période. Si donc l'observation avait commencé pendant une série d'oscillations, il aurait fallu donner à l'arc initial une plus grande valeur pour vaincre la résistance plus grande, et produire au bout d'un nombre donné d'oscillations l'arc final qui a été réellement observé. J'ai déterminé la correction à appliquer en raison de cette cause d'erreur, et je l'ai trouvée d'environ $+0,009$; je

---

([1]) *Voir* la Note A à la fin.

renverrai à une Note pour la démonstration, afin de ne pas interrompre la discussion actuelle (¹). Je supposerai donc dans les comparaisons suivantes que pour l'eau

$$\sqrt{\mu'} = 0,0564,$$

les unités étant les mêmes que précédemment, savoir le pouce anglais et la seconde. Que μ' est indépendant, ou à très peu près, de la pression du fluide, c'est ce qui ressort d'une expérience de Coulomb, dans laquelle il a trouvé que le décrément de l'arc d'oscillation d'un disque oscillant dans l'eau était le même dans un récipient vide d'air que sous la pression entière de l'atmosphère.

Je mentionnerai encore ici une autre expérience de Coulomb qui porte directement sur un point de la théorie. En couvrant le disque d'une mince couche de suif, il trouva que la résistance était la même qu'auparavant; et même quand le suif était saupoudré de grès pulvérisé, au moyen d'un crible, l'accroissement de résistance était à peine sensible. Ce résultat est une confirmation frappante de l'exactitude des équations de condition que j'ai supposées se vérifier à la surface d'un solide.

66. Je vais maintenant comparer la formule (118) avec les résultats obtenus par Bessel pour les oscillations d'une sphère de laiton dans l'eau, qui se trouvent à la page 65 de son Mémoire (p. 186 du Tome IV de ce Recueil). Cette sphère était suspendue de façon à pouvoir être immergée dans de l'eau contenue dans un large bassin, et on la fit osciller avec deux longueurs de fil, les mêmes qu'on avait employées pour les expériences dans l'air. Les durées d'oscillation furent 1,9085 pour le long pendule, et 1,1078 pour le pendule court. Voici les résultats :

	Long pendule.	Pendule court.
k d'après l'expérience	0,648	0,602
k d'après la théorie	0,631	0,600
Différence	+0,017	+0,002

On ne donne pas la profondeur à laquelle la boule était immergée, mais elle était probablement suffisante pour rendre petite, sinon insensible, l'influence de la surface libre. Le bassin avait

(¹) *Voir* la Note B à la fin.

3 pieds de diamètre, et l'eau 10 pouces anglais de profondeur, de sorte qu'à moins que la boule n'ait été suspendue au voisinage du fond, ce qui ne paraît avoir été le cas, l'effet de la limitation du fluide par les parois du vase doit avoir été insignifiant. L'accord de la théorie et de l'expérience est, comme on le voit, très satisfaisant.

67. Dans le même Mémoire qui contient les expériences sur des disques, Coulomb a donné les résultats de quelques expériences dans lesquelles le disque immergé dans le fluide était remplacé par un long cylindre mince, dont l'axe était horizontal et le milieu de cet axe sur le prolongement de celui du cylindre vertical de cuivre. Dans ces expériences, les arcs ne décroissaient plus en progression géométrique, ainsi qu'il en eût été si la résistance avait varié comme la vitesse; mais on trouva que les résultats de l'observation étaient bien représentés, si l'on supposait la résistance variant en partie comme la première puissance, et en partie comme le carré de la vitesse. Dans la notation de Coulomb, $\frac{1}{1-m}$ désigne le rapport suivant lequel l'arc d'oscillation serait diminué après une seule oscillation, si la partie de la résistance qui varie comme le carré de la vitesse était détruite. Les quelques expériences faites avec le même cylindre étaient bien représentées par la formule déduite de l'hypothèse susmentionnée touchant la résistance, lorsqu'on donnait des valeurs numériques convenables à deux constantes arbitraires m et p, p se rapportant à la partie de la résistance qui varie comme le carré de la vitesse.

Concevons le cylindre divisé en tranches élémentaires par des plans perpendiculaires à son axe. Soit r la distance d'une tranche au point milieu, θ l'angle entre la position actuelle et la position moyenne de cet axe, dF la partie de la résistance éprouvée par la tranche qui varie comme la première puissance de la vitesse. En calculant la résistance comme si l'élément en question appartenait à un cylindre indéfini se mouvant avec la même vitesse linéaire, nous avons par les formules de l'art. 31

$$dF = k'M'n\frac{d\xi}{dt}, \qquad \text{où} \qquad M' = \pi\rho a^2 dr, \qquad \frac{d\xi}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}.$$

Si G est le moment de la résistance, l la longueur totale du cy-

lindre, nous avons, en posant $n = \pi\tau^{-1}$,

$$G = \frac{\pi^2 k' \rho a^2 l^3}{12\tau} \frac{d\theta}{dt},$$

d'où

$$\log_e (1 - m)^{-1} = \frac{\pi^2 k' \rho a^2 l^3}{24 \, \mathrm{I}}, \tag{165}$$

I étant le moment d'inertie.

Si nous exprimons I en fonction des mêmes quantités que dans le cas d'un disque, nous tirons de (147) et de (165)

$$\log_{10} (1 - m)^{-1} = \log_{10} e \, \frac{\pi \mu' \mathrm{T} l^3}{3 \mathrm{R}^2} \, \frac{g\rho}{\mathrm{W}} \, \frac{\mathrm{T}}{\tau} \, \mathfrak{m}^2 k'. \tag{166}$$

$g\rho$ est le poids d'un millimètre cube d'eau, ou la millième partie d'un gramme. Les valeurs numériques de μ', T, R et W ont déjà été données, mais μ' doit être transformé pour être exprimé en millimètres carrés au lieu de pouces carrés. Les trois cylindres mis successivement en expérience avaient la même longueur, 249^{mm}. Leurs circonférences, calculées d'après leurs poids et exprimées en millimètres, étaient 21,3, 11,2 et 0,87, et les durées de quatre oscillations étaient 92^{s}, 91^{s} et 91^{s}. Les valeurs de $\mathfrak{m}$, calculées d'après ces données, à l'aide de la formule (147), sont 0,4332, 0,2312 et 0,01796. Pour la première et la seconde de ces valeurs, $\mathfrak{m}^2 k'$ peut se déduire par interpolation de la Table de la première Partie; pour la troisième, il suffit d'employer la seconde des formules (115).

Les résultats sont les suivants :

	Cylindre n° 1.	Cylindre n° 2.	Cylindre n° 3.
m d'après l'expérience....	0,0400	0,0260	0,0136
m d'après la théorie......	0,0413	0,0291	0,0113
Différence.........	−0,0013	−0,0031	+0,0023

Les différences entre les résultats de l'expérience et ceux de la théorie sont peut-être aussi petites qu'on pouvait raisonnablement l'espérer, si l'on considère que, malgré la nature délicate des expériences, il a fallu déduire de leurs résultats les valeurs numériques de deux constantes m et p.

68. Le même Mémoire de Coulomb fait encore mention d'une série d'expériences sur des disques et des cylindres, dans lesquelles l'eau était remplacée par l'huile. Les expériences sur les disques firent voir que, pour un disque donné, l'arc d'oscillation décroît en progression géométrique, et que, pour des disques différents, les moments des résistances étaient entre eux comme les quatrièmes puissances des diamètres. Les résistances absolues étaient plus grandes que dans le cas de l'eau dans le rapport de 17,5 à 1 à peu près. Coulomb ne donne aucun détail touchant ses expériences sur des cylindres oscillant dans l'huile. Il rapporte seulement qu'en faisant osciller dans l'huile les mêmes cylindres qui avaient servi dans l'eau, ou d'autres plus courts quand la résistance était trop grande, il a trouvé, conformément aux résultats obtenus avec les disques, que la cohésion de l'huile était à celle de l'eau comme 17 est à l'unité. La cohésion est supposée ici mesurée par cette partie de la résistance qui est proportionnelle à la simple vitesse. En faisant un calcul grossier du rapport des résistances aux cylindres oscillant dans l'huile et dans l'eau, dans la supposition que $\sqrt{\mu'}$ pour l'huile est à $\sqrt{\mu'}$ pour l'eau dans le rapport de 17.5 à 1, comme cela résulterait des expériences sur les disques si l'on néglige la différence des poids spécifiques des deux liquides, j'ai trouvé que le rapport en question aurait dû être celui de 100 à 1, au lieu de 17 à 1. Il semblerait, d'après cela, que notre théorie ne s'applique pas à l'huile; mais il faudrait de nouvelles expériences avant de considérer ce point comme établi, en raison du doute théorique que l'on peut avoir sur l'application des formules de la Section III de la première Partie à des cylindres extrêmement fins, particulièrement dans le cas où μ' est grand, de sorte que $\mathfrak{m}$ est très petit.

Il serait intéressant de faire voir si ce que j'ai appelé *frottement intérieur* est ou non de même nature que la viscosité. Coulomb et Dubuat appliquent l'expression de *viscosité* à cette propriété de l'eau en vertu de laquelle elle produit certains effets qui, dans ce Mémoire, se sont montrés parfaitement explicables par la théorie du frottement intérieur; tandis que Poisson, dans un de ses Mémoires, affirme expressément que les termes des équations du mouvement, qui résultent de ce que j'ai appelé ici *frottement intérieur*, appartiennent à des fluides parfaits et n'ont

rien à voir avec la viscosité [1]. Poisson n'indique d'ailleurs en rien les raisons sur lesquelles il appuyait son opinion.

69. J'arrive maintenant aux expériences de Dubuat, qui sont contenues dans un excellent Ouvrage de ce savant, intitulé *Principes d'Hydraulique*, dont la deuxième édition a paru en 1786. La première édition ne renferme pas les expériences en question. Dubuat remarque avec raison que la durée d'oscillation d'un pendule oscillant dans un fluide est plus grande qu'elle ne serait dans le vide, non seulement en raison de la perte de poids éprouvée dans le fluide, laquelle diminue la force motrice, mais encore en raison de la masse de fluide qui doit être regardée comme participant au mouvement du pendule; et il a même déterminé expérimentalement la masse de fluide qui doit être regardée comme emportée par le corps oscillant dans le cas d'une sphère et de quelques autres solides. Dubuat a donc précédé d'environ quarante ans la découverte de Bessel; mais ce ne fut qu'après l'apparition du Mémoire de Bessel que l'attention fut attirée sur les travaux de Dubuat relatifs à la même question.

La méthode de Dubuat était la suivante. Imaginons un corps suspendu à un fil fin végétal ou métallique, et mis en oscillation dans le vide, et soit a la longueur du pendule, comptée du centre de suspension au centre d'oscillation. Imaginons ensuite le même corps oscillant dans un fluide, dans lequel son poids apparent est p, de sorte que, si P désigne le poids du fluide déplacé, le poids vrai du corps est $P+p$. Puisque la force motrice est diminuée dans le rapport de $p+P$ à p, si l'inertie du corps était tout ce qu'elle eût à surmonter, il faudrait diminuer la longueur du pendule dans le même rapport, pour conserver la même durée d'oscillation. Mais comme la masse en mouvement comprend non seulement celle du corps lui-même, mais en outre celle du fluide que ce corps entraîne avec lui, le pendule doit encore être raccourci davantage, pour conserver la même durée d'oscillation. Soit l la longueur du pendule ainsi raccourci, et $\mathfrak{n}$ (j'emploie pour la même raison que précédemment cette notation au lieu de l'n de Dubuat) un facteur plus grand que l'unité et tel que $p+\mathfrak{n}P$ soit

[1] *Journal de l'École Polytechnique*, t. XIII, p. 95.

le poids de la masse en mouvement; alors

$$(167) \qquad l = \frac{ap}{p + \mathrm{n}\mathrm{P}}, \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{n} = \frac{p}{\mathrm{P}}\left(\frac{a}{l} - 1\right).$$

Les expériences de Dubuat sur ce sujet comprennent 44 expériences sur des sphères oscillant dans l'eau (t. II, p. 236); 31 expériences sur d'autres solides oscillant dans l'eau (p. 246); et 3 expériences sur des sphères oscillant dans l'air (p. 283). La table suivante contient la comparaison de la formule (148) avec les résultats de Dubuat sur des sphères oscillant dans l'eau. La valeur de $\sqrt{\mu'}$ employée dans le calcul est 0,0564 pouce anglais ou 0,5291 pouce français.

Expériences de Dubuat sur des sphères oscillant dans l'eau.

	τ.	n calculé.	n observé.	Différence.
Sphère de plomb.	$\frac{1}{2}$	1,633	1,502	−0,131
Diamètre 1,0113 pouce anglais.	1	1,687	1,502	−0,185
	2	1,766	1,522	−0,244
Poids dans l'eau 2102 grains.	3	1,825	1,620	−0,205
Sphère de verre.	2	1,602	1,518	−0,084
Diam. 2,645 pouce anglais	4	1,644	1,569	−0,075
Poids dans l'eau 574 grains.	6	1,676	1,598	−0,078
Même sphère pesant dans l'eau 2102 grains........	1	1,572	1,515	−0,057
	2	1,602	1,516	−0,086
	3	1,624	1,523	−0,101
	4	1,644	1,546	−0,098
Même sphère pesant dans l'eau 4204 grains........	1	1,572	1,537	−0,035
	2	1,602	1,523	−0,079
	3	1,624	1,524	−0,100
	4	1,644	1,538	−0,106
Même sphère pesant dans l'eau 9216 grains........	$\frac{1}{2}$	1,551	1,449	−0,102
	1	1,572	1,372	−0,200
	2	1,602	1,494	−0,108
	3	1,624	1,494	−0,130
Sphère de bois.	2	1,566	1,507	−0,059
Diam. 4,076 pouce anglais.	3	1,581	1,547	−0,034
Poids dans l'eau 2102 grains.	4	1,593	1,547	−0,046
	6	1,614	1,567	0,057

Expériences de Dubuat sur des sphères oscillant dans l'eau.

	τ.	n calculé.	n observé.	Différence.
Même sphère pesant dans l'eau 4204 grains........	1	1,547	1,375	— 0,172
	2	1,566	1,456	— 0,110
	3	1,581	1,525	— 0,056
	4	1,593	1,557	— 0,036
	6	1,614	1,549	— 0,065
Même sphère pesant dans l'eau 9216 grains........	1	1,547	1,57	+ 0,023
	2	1,566	1,553	— 0,013
	3	1,581	1,59	+ 0,009
	4	1,593	1,583	— 0,010
Autre sphère de bois. Diamètre $6\frac{2}{3}$ pouces anglais. Poids dans l'eau 2102 grains.	3	1,549	1,27	— 0,279
	4	1,557	1,394	— 0,163
	6	1,570	1,487	— 0,083
	9	1,585	1,566	— 0,019
	12	1,599	1,569	— 0,030
	18	1,621	1,565	— 0,056
Même sphère pesant dans l'eau 3204 grains........	10,85	1,594	1,634	+ 0,040
Même sphère pesant dans l'eau 4204 grains........	3	1,549	1,651	+ 0,102
	4	1,557	1,627	+ 0,070
	6	1,570	1,654	+ 0,084
	9	1,585	1,664	+ 0,079
	12	1,599	1,674	+ 0,075

70. Si nous excluons les expériences faites avec la grosse boule, qui ne peuvent être comparées à la théorie pour une raison qui sera exposée plus tard, nous remarquons que, dans sept des huit autres groupes d'expériences, le signe des différences obs.-calc. est régulièrement *moins*. La prédominance des erreurs négatives pourrait être détruite par l'emploi dans la réduction d'une valeur de $\sqrt{\mu'}$ beaucoup plus petite. Mais nous avons vu que la valeur de $\sqrt{\mu'}$ déduite des expériences de Coulomb sur le décroissement de l'amplitude de l'oscillation des disques, satisfaisait presque exactement aux observations de Bessel sur la durée d'oscillation dans l'eau d'une sphère d'environ deux pouces de diamètre. Les très petites erreurs qui restaient dans ce cas avaient toutes deux le signe +, tandis que

dans les expériences de Dubuat sur des boules d'un pouce et de deux pouces et demi, les erreurs, qui sont beaucoup plus grandes, ont toutes le signe —. Puisque les expériences de Dubuat et de Bessel, bien que faites dans les mêmes conditions, ne conduisent pas au même résultat, il est impossible à une théorie quelconque de s'adapter à la fois aux deux séries. Les nombres de la dernière colonne du Tableau précédent sont cependant beaucoup trop réguliers pour qu'on puisse les attribuer à de simples erreurs accidentelles de l'observation. Si nous admettons que les résultats de Bessel sont très voisins de l'exactitude, il faut qu'il y ait eu, dans le mode d'opération de Dubuat ou dans la réduction de ses expériences, quelque cause qui a introduit une erreur constamment de même sens.

Relativement à la réduction des expériences, on peut remarquer que la longueur l était mesurée à partir du centre d'oscillation, tandis que dans la formule (148) on suppose la masse, dont le poids est kP ou $(\mathfrak{n}-1)$P, rassemblée au centre de la sphère. Si h est la distance de ce centre à l'axe de suspension, la valeur observée de $\mathfrak{n}-1$ devrait, en toute rigueur, être augmentée dans le rapport de h^2 à l^2, ou la valeur calculée être diminuée dans le rapport de l^2 à h^2, avant de comparer les résultats de la théorie à ceux de l'expérience. En particulier, dans le cas des sphères chargées, la valeur de $\mathfrak{n}$ ainsi corrigée serait un peu diminuée ; mais, à l'exception d'un très petit nombre de cas, dans lesquels ou l ou $a-l$ est petit, la diminution serait à peine sensible. Après avoir cherché longtemps en vain l'explication de cette grosse erreur négative qui se manifeste avec tant de régularité, il me vint à l'esprit que la solution de cette difficulté était probablement la suivante.

Quand un pendule oscille dans l'eau, l'amplitude de l'oscillation diminue rapidement ; cette rapide diminution introduit en fait une grande difficulté dans les expériences de ce genre. On se rappelle que, dans les expériences de Dubuat, on raccourcissait ou l'on allongeait le fil de suspension jusqu'à ce que la durée de l'oscillation fût un nombre exact de secondes, ou quelquefois une demi-seconde. Or il est probable que l'observateur donnait parfois au fil de suspension une légère poussée au moment où le pendule commençait à redescendre, afin de prolonger les oscillations pendant un temps suffisant pour obtenir, avec une précision tolérable, une durée d'oscillation ayant la valeur voulue. Si cela était, ces pous-

sées devaient accélérer légèrement les oscillations, et par suite faire que la longueur du fil déduite de l'observation fût un peu trop grande, et faire ressortir un peu trop faible l'influence retardatrice de l'eau sur les oscillations. A l'inspection de la colonne des différences, on remarque que parfois, la même sphère chargée d'un poids différent oscillant dans le même temps que dans une autre expérience, les nombres de cette colonne varient d'une quantité plus grande que celle qui peut être attribuée aux erreurs d'observation purement accidentelles. Ceci s'accorde très bien avec la conjecture que je viens de faire, et semble difficilement explicable par une autre cause, puisque toutes les circonstances relatives au fluide doivent avoir été exactement les mêmes dans les deux cas.

L'apparition des différences positives dans le cas des sphères de bois les plus grosses peut s'expliquer par l'influence des parois et du fond du vase qui renfermait le liquide, et par celle de la surface libre, que l'action de la gravité tendait à maintenir horizontale. Le vase contenant le liquide avait 51 pouces anglais de long et 17 de large, la profondeur de l'eau était de 14 pouces, et les boules étaient immergées à 3 pouces environ au-dessous de la surface, si bien que l'influence des parois devait devenir très sensible dans le cas des grosses boules. Si l'on objectait que la même sphère a donné des différences négatives dans le premier groupe d'expériences, je ferais remarquer que, lorsque le poids apparent de cette grosse boule n'était que 2102 grains de France, la résistance aurait rapidement amorti les oscillations, si l'on n'avait fréquemment appliqué une force étrangère.

71. Dans les expériences de Dubuat sur des sphères oscillant dans l'air, la légèreté du fluide était compensée par l'extrême légèreté des boules, qui étaient formées, les deux premières de papier, et la troisième de baudruche. Dans le Tableau suivant, le diamètre $2a$ des boules est exprimé en pouces français. La valeur de $\sqrt{\mu'}$ employée dans la réduction est la même dont on avait précédemment fait usage dans la réduction des observations dans l'air, 0,116 pouce anglais ou 0,1088 pouce français.

Expériences de Dubuat sur des sphères légères oscillant dans l'air.

Numéros.	$2a$.	τ.	n calculé.	n observé.	Différence.
337....	4,046	1,51	1,61	1,51	−0,10
338.....	6,625	1,84	1,57	1,63	+0,06
339.....	17,25	3,625	1,53	1,54	+0,01

Les différences paraîtront certainement fort petites, si l'on tient compte de la délicatesse des expériences et de la simplicité des appareils mis en usage.

72. La comparaison de la théorie à l'observation a jusqu'ici consisté seulement dans le rapprochement des valeurs observées de la durée d'oscillation et des résultats calculés à l'aide d'une valeur adoptée de $\sqrt{\mu'}$. Mais, d'après la théorie, nous devons pouvoir, sans assigner une valeur particulière à aucune nouvelle constante arbitraire, calculer la loi du décroissement de l'arc d'oscillation. Je n'ai rencontré aucune expérience faite en vue de déterminer ce décroissement dans le cas d'oscillations extrêmement petites, telles que celles qu'on considère dans les expériences du pendule. Les expériences de Newton et d'autres savants, dans lesquelles l'arc d'oscillation était tellement grand que la résistance dépendait simplement du carré de la vitesse, sont tout à fait impropres au but que je me propose. Mais les expériences du pendule de Bessel et de Baily fournissent tout ou partie des données nécessaires, car les amplitudes ont été enregistrées dans le but de permettre la réduction aux vibrations infiniment petites.

Dans les expériences de Bessel, l'arc d'oscillation est donné pour la fin d'intervalles de temps égaux pendant toute la durée du mouvement. Le nombre de ces données s'élève quelquefois à 11 pour une expérience, et n'est jamais inférieur à 3. Jusque-là, les observations donnent ce dont nous avons besoin ; mais il y a d'autres causes qui empêchent une comparaison exacte de la théorie et de l'expérience. En premier lieu, les sphères oscillaient si près du fond de la boîte que l'accroissement de la résistance due à l'emprisonnement de l'air a dû être très sensible. En second lieu, l'influence du fil a dû être très sensible, particulièrement dans le cas du long

pendule. En effet, la Table de la Section III de la première Partie montre que pour le fil (pour lequel $\mathfrak{m}$ est très petit) la valeur de k' est beaucoup plus grande que celle de k, tandis que pour des boules du diamètre de celles dont on a fait usage, lorsque la durée d'oscillation n'est que d'une ou deux secondes, k' est beaucoup plus petit que k. D'après cela, si l'on appliquait les formules de cette section à ces fils fins, l'influence du fil sur l'amplitude de l'oscillation serait beaucoup plus grande que son influence sur la durée de l'oscillation, et par suite deviendrait fort sensible. Mais on a vu dans la Section IV que l'effet du fil sur la diminution de l'arc d'oscillation est probablement plus grand que ne le donnerait la formule, et par suite l'incertitude provenant de l'influence du fil serait probablement une fraction notable de l'effet entier. De plus, les expériences de Bessel ayant toutes été faites dans l'air ne fournissent aucune donnée qui permette d'éliminer la partie du résultat observé qui est due au frottement au point de suspension, à l'imparfaite élasticité du fil, ou à la dissipation graduelle de force vive par communication du mouvement au support. Enfin, dans le cas du long pendule, les observations étaient faites sous des amplitudes trop grandes, car la loi de décroissement de l'arc d'oscillation s'écarte sensiblement de celle de la progression géométrique. Dans les expériences de Baily, on n'a noté que l'arc initial et l'arc final, et on ne les donne même pas dans les *Expériences additionnelles*. Ces expériences ne nous permettent donc pas de savoir s'il serait suffisamment exact de supposer un décroissement en progression géométrique. De plus l'arc final était généralement si petit qu'une petite erreur commise sur sa mesure produirait une erreur très sensible sur la loi du décroissement déduite de l'expérience. Pour ces motifs, il serait déraisonnable de demander un accord parfait entre les formules et les résultats des expériences de Bessel et de Baily. Toutefois on doit s'attendre à voir les formules donner un résultat erroné par défaut, et cette erreur ne doit être qu'une fraction assez faible du résultat donné par l'observation. Pour ce motif, il n'est pas absolument inutile de comparer la théorie à l'observation en ce qui regarde le décroissement de l'arc d'oscillation.

73. Considérons d'abord le cas d'une sphère suspendue à un fil. Nous emploierons la même notation dont il a été fait usage

dans la recherche de l'expression de l'influence de l'air sur la durée de l'oscillation, à cela près que les facteurs k' et k'_1 prennent la place des facteurs k et k_1. Si nous considérons seulement la partie de la résistance qui affecte l'arc d'oscillation, nous avons pour les portions dues respectivement à la sphère et à l'élément du fil dont la longueur est ds et la distance à l'axe de suspension s,

$$k'M'n(l+a)\frac{d\theta}{dt}, \qquad k'_1\frac{M'_1}{l}\,ds\,ns\frac{d\theta}{dt},$$

et si nous prenons le moment de la résistance, si nous le divisons par le double du moment d'inertie, le coefficient de $\frac{d\theta}{dt}$ dans le résultat, pris négativement et multiplié par t, sera l'exposant de e dans l'expression de l'arc. Si donc a_0 est l'arc d'oscillation initial, et a_t l'arc à la fin du temps t,

$$(168)\qquad \log_e a_0 - \log_e a_t = \frac{k'M'(l+a)^2 + \frac{1}{3}k'_1M'_1l^2}{M(l+a)^2 + \frac{1}{3}M_1l^2}\,\frac{\pi t}{2\tau},$$

$M'(l+a)^2$ étant pris comme précédemment pour le moment d'inertie de la sphère, ce qui est bien suffisamment exact. Si donc nous désignons par $\mathfrak{l}$ le logarithme népérien du rapport de l'arc au commencement d'une oscillation à l'arc à la fin de cette oscillation, nous n'avons qu'à faire $t=\tau$ dans (168), et négligeant l'influence du fil, nous avons

$$(169)\qquad \mathfrak{l} = \frac{\pi k'}{2}\,\frac{\sigma}{S}.$$

Si maintenant $\Delta k'$ est la correction à appliquer à k' dans cette formule pour tenir compte du fil, comme k' et k'_1 sont combinés ensemble dans l'expression de l'arc exactement comme k et k_1 dans l'expression de la durée, nous avons

$$(170)\qquad \Delta k' = \frac{k'_1}{k_1}\,\Delta k,$$

et la formule approchée (115) donne

$$(171)\qquad \Delta k' = -\frac{4L}{\pi}\,\Delta k;$$

la valeur numérique de $\Delta k'$ se déduit ainsi aisément de celle de Δk

qui a déjà été calculée. On tire aussi de (52)

$$(172)\qquad k' = k - \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{9}\left(k - \tfrac{1}{2}\right)^2,$$

qui donne aisément k' au moyen de k déjà calculé.

74. Avant de comparer ces formules avec les expériences de Bessel, il est utile de savoir jusqu'à quel point ces dernières s'accordent avec l'hypothèse d'un décroissement de l'arc d'oscillation en progression géométrique. Dans les Tableaux de Bessel, cet arc est inscrit dans la colonne intitulée μ. Cette lettre désigne le nombre de lignes de Paris lu sur une échelle placée derrière le fil, un peu au-dessus de la boule; il est compté depuis la position d'arrêt instantané du fil d'un côté de la verticale, jusqu'à la position correspondante de l'autre côté. La distance de l'échelle au point de suspension étant donnée, aussi bien que la correction à appliquer à μ en raison de la parallaxe, on déduit aisément la valeur de l'arc d'oscillation. Mais, pour le but que nous nous proposons, toute quantité proportionnelle à l'arc peut remplacer celui-ci, et μ, quoique proportionnel à la tangente en toute rigueur, peut être regardé comme proportionnel à l'arc lui-même, l'arc initial ne s'élevant jamais à plus de 50′ de part et d'autre de la verticale.

Nous pouvons maintenant nous former un jugement exact du degré d'exactitude de la formule géométrique, en comparant l'arc observé au milieu d'une expérience avec la moyenne géométrique de l'arc initial et de l'arc final. J'ai traité de cette manière les expériences de Bessel, nos 1, 2, 3, 4 et 5. Chacune d'elles est en fait un groupe de six expériences, quatre avec le long pendule, deux avec le pendule court, de sorte que l'ensemble comprend vingt expériences avec le long pendule et dix avec le pendule court. Dans le cas du long pendule, la valeur observée de μ est régulièrement au-dessous de la valeur calculée, et la différence est à peu près constante. La différence moyenne s'élève à 0,688 ligne, avec une erreur moyenne de 0,019. Cette erreur moyenne n'est pas due entièrement aux erreurs d'observation, ou aux variations de l'état de l'air, etc., mais aussi en partie à de légères variations dans la valeur de l'arc initial, les différences les plus grandes accompagnant ordinairement les arcs initiaux les

plus grands. L'arc initial correspondait ordinairement à $\mu = 39$ ou 40 lignes, et l'arc final à $\mu = 15$ ou 16 lignes. Dans le cas du pendule court, les différences dans huit expériences sur dix ont le même signe que précédemment. La différence moyenne est 0,025 et l'erreur moyenne 0,043. Les arcs d'oscillation étaient à peu près les mêmes que dans les expériences précédentes; mais, l'axe de suspension étant beaucoup plus rapproché de l'échelle, la valeur initiale de μ n'était que de 12 à 13 lignes, et la valeur finale environ 7 lignes. En construisant sur le papier quelques-unes des expériences, les abscisses étant proportionnelles aux temps et les ordonnées aux logarithmes de μ, on a trouvé que, pour le long pendule, la ligne ainsi tracée est décidément courbe, avec sa concavité tournée vers les ordonnées positives. La courbure de la ligne qui appartient au pendule court était difficile à apercevoir, ou du moins à séparer de l'effet des erreurs d'observation. Les expériences 9, 10 et 11, traitées numériquement comme les expériences 1 à 5, ont conduit exactement au même résultat. Dans les seize expériences avec la boule d'ivoire et le pendule court comprises dans les expériences 12, 13, 14 et 15, l'excès de la valeur calculée de μ sur la valeur observée était plus apparent, l'excès moyen s'élevant à 0,129. La raison en est probablement que les observations avec la boule d'ivoire ont été faites sous des amplitudes plus grandes que celles sur la boule de laiton.

Il semble donc qu'au moins dans le cas du long pendule une correction est nécessaire pour débarrasser le décroissement observé de l'arc d'oscillation de l'effet de cette portion de la résistance qui croît en même temps que l'arc plus rapidement que si elle variait comme la première puissance de la vitesse, et ramener ainsi la loi du décroissement à ce qu'elle eût été dans le cas des oscillations infiniment petites.

75. Dans les expériences de Coulomb, la résistance s'est montrée composée de deux termes, renfermant, l'un la première puissance, l'autre le carré de la vitesse. Si nous supposons la même loi valable dans le cas présent, et si nous désignons par α l'amplitude de l'oscillation à la fin du temps t, mesurée comme un angle, nous aurons

$$\frac{d\alpha}{dt} = -A\alpha - B\alpha^2, \tag{173}$$

A et B étant des constantes. Il nous faut maintenant tâcher de tirer A des résultats de l'observation. Puisque la substitution à α d'une quantité proportionnelle à α ne changera dans (173) que la constante B, et que la valeur de cette constante n'est pas nécessaire pour la comparaison à la théorie, nous pourrons substituer à α le nombre de lignes lu sur l'échelle qui se trouve dans la colonne μ des Tables de Bessel.

J'ai employé quatre méthodes différentes pour déduire A des résultats observés. Celle que je vais donner est la plus rapide des quatre, et elle est suffisamment exacte pour notre but.

L'équation (173) donne, après qu'on l'a divisée par α,

$$(174) \qquad \frac{d \log \alpha}{dt} = -A - B\alpha.$$

Maintenant, comme on l'a déjà remarqué, les arcs d'oscillation décroissent à peu près en progression géométrique. Si cette loi était rigoureusement vraie, nous aurions

$$(175) \qquad \alpha = \alpha_0 \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_0}\right)^{\frac{t}{T}},$$

où α_0 désigne l'arc initial, α_2 l'arc final, et T la durée totale de l'observation. Nous pouvons, sans commettre d'erreur appréciable, substituer cette valeur de α dans le dernier terme de (174). La grandeur de l'erreur ainsi commise ne doit pas être jugée simplement d'après la petitesse de B. L'expression approchée (175) doit plutôt être regardée comme une formule d'interpolation bien choisie, et en fait $T^{-1}\log_e(\alpha_0\alpha_2^{-1})$ diffère très sensiblement de A. Faisant cette substitution dans (174), intégrant, puis après l'intégration rétablissant α dans le dernier terme à l'aide de (175), nous obtenons

$$(176) \qquad \log \alpha = -At - \frac{BT\alpha}{\log \alpha_2 - \log \alpha_0} + C,$$

C étant une constante arbitraire. Pour déterminer les trois constantes A, B et C, soit α_1 l'arc observé au milieu de l'expérience; appliquons la dernière équation aux arcs α_0, α_1 et α_2, puis prenons les premières et les secondes différences de chaque membre de l'équation. Désignons par Δ_1 la somme des deux différences premières, de sorte que $\Delta_1 t$ est la même chose que T.

Nous pouvons alors prendre pour les deux équations qui détermineront A et B,

$$\Delta_1 \log \alpha_0 = - A \Delta_1 t - \frac{B \Delta_1 t . \Delta_1 \alpha_0}{\Delta_1 \log \alpha_0}, \qquad \Delta_2 \log \alpha_0 = - \frac{B \Delta_1 t . \Delta_2 \alpha_0}{\Delta_2 \log \alpha_0}.$$

Éliminant B, et passant des logarithmes népériens aux logarithmes ordinaires, que nous désignerons par Log, nous avons

$$(177) \qquad A = \frac{-\Delta_1 \operatorname{Log} \alpha_0}{\operatorname{Log} e \, \Delta_1 t} \left(1 - \frac{\Delta_2 \operatorname{Log} \alpha_0 \, \Delta_1 \alpha_0}{\Delta_1 \operatorname{Log} \alpha_0 \, \Delta_2 \alpha_0} \right).$$

Si nous supposons que la partie de $-\frac{d\alpha}{dt}$ qui ne varie pas comme la première puissance de α est $\alpha^2 \varphi'(\alpha)$ au lieu de $B\alpha^2$, nous aurons de la même manière

$$(178) \qquad A = \frac{-\Delta_1 \operatorname{Log} \alpha_0}{\operatorname{Log} e . \Delta_1 t} \left\{ 1 - \frac{\Delta_2 \operatorname{Log} \alpha_0 . \Delta_1 \varphi(\alpha_0)}{\Delta_1 \operatorname{Log} \alpha_0 . \Delta_2 \varphi(\alpha_0)} \right\}.$$

76. Je n'ai pas essayé de chercher dans les expériences de Bessel une preuve pour ou contre l'exactitude de l'équation (173). La formule approchée (175) satisfait déjà si bien aux observations, que presque toute formule raisonnable d'interpolation qui introduirait une nouvelle constante arbitraire représenterait les expériences dans les limites des erreurs d'observation.

On peut observer que le facteur hors des crochets dans les équations (177) et (178) est la première valeur approchée de A obtenue en faisant usage seulement des arcs du commencement et de la fin, et supposant que les arcs décroissent en progression géométrique. Dans le cas du long pendule, la valeur de A, corrigée conformément à la formule (178), serait très sensiblement différente suivant que nous supposerions $\varphi(\alpha)$ égal à $B\alpha$, ce qui réduirait (178) à (177), ou égal à $B\alpha^2$. Dans le cas du long pendule avec boule de laiton, la valeur corrigée de A, déduite de la formule (177), était égale à $\frac{77}{100}$ environ de la première valeur approchée.

Je n'ai pas cru nécessaire de passer en revue toutes les expériences de Bessel, puisqu'on ne pouvait s'attendre à ce que la formule rendît compte du décrément total observé. J'ai pris seulement quatre expériences pour chaque sorte de pendule, savoir : I, *a*, *b*, *c* et *f* pour le long pendule avec la boule de laiton ; I, *c* et *d*, et II, *c* et *d* pour le pendule court avec la même boule ; XII, *a*, *b*, *c* et *d* pour le long pendule avec la boule d'ivoire, et XII, *a'*, *b'*, *c'* et *d'* pour

le pendule court avec la même boule. La formule (177) a donné les résultats suivants :

Premier cas.... $\log e.\tau\lambda = 0{,}000059$; erreur moyenne $= 0{,}0000020$.
Deuxième cas... $\log e.\tau\lambda = 0{,}000054$; erreur moyenne $= 0{,}000075$.
Troisième cas... $\log e.\lambda = 0{,}000631$; erreur moyenne $= 0{,}000046$.
Quatrième cas... $\log e.\lambda = 0{,}000167$; erreur moyenne $= 0{,}000074$.

Or $l = \tau\lambda$, et par conséquent, pour obtenir les valeurs de l déduites de l'expérience, il suffira de diviser les nombres précédents par le module du système des logarithmes ordinaires. La valeur théorique de l se tire de (169), en ajoutant à k' la correction $\Delta k'$ qui dépend du fil. On arrive ainsi aux résultats suivants :

	Long P. b. de laiton.	P. court. b. de laiton.	Long P. b. d'ivoire.	P. court. b. d'iv.
1000000 l pour la sphère seule, dans une masse illimitée de fluide, d'après la théorie....	67	50	298	222
Corr. additionnelle pour le fil.	27	9	114	39
	94	59	412	261
1000000 l d'après l'expérience..	175	116	1453	384

On voit que la valeur calculée du décroissement de l'arc ne s'élève en moyenne qu'à la moitié environ de la valeur déduite de l'observation. C'est à peu près ce que nous devions attendre, si nous considérons les diverses circonstances dont il n'a pas été tenu compte dans le calcul et qui tendent toutes à augmenter la rapidité du décroissement.

77. Parmi les expériences de Baily, j'ai pris les suivantes pour les comparer à la théorie au point de vue du décroissement de l'arc d'oscillation. N° 1 (sphère de platine de $1\frac{1}{2}$ pouce anglais), expériences 1 à 8 ; n° 3 (sphère de laiton de $1\frac{1}{2}$ pouce anglais), expériences 9 à 16 ; n° 6 (sphère de laiton de 2 pouces anglais), expériences 33 à 40 ; n° 21 (longue tige cylindrique de cuivre de 0,410 pouce anglais), expériences 109 à 112, et n° 35-38 (long tube de laiton de $1\frac{1}{2}$ pouce anglais), expériences 167 à 174. J'ai cru inutile de calculer les résultats obtenus avec les autres boules de $1\frac{1}{2}$ pouce et 2 pouces, parce qu'elles étaient de même dimension que

les boules de laiton, et surtout parce que l'observation du décroissement de l'arc n'était pas l'objet que Baily avait en vue en faisant ses expériences.

La sphère de 3 pouces, et toutes les autres tiges cylindriques et combinaisons de tiges cylindriques et de sphères, appartiennent aux *Expériences additionnelles* pour lesquelles les arcs ne sont pas donnés.

Un exemple fera mieux connaître le mode de calcul employé. Prenons le couple des expériences n°s 1 et 2. Dans le n° 1, l'intervalle total était de $4^h,22$, l'arc initial $0°,77$, l'arc final $0°,29$, la hauteur barométrique moyenne 30,24 pouces anglais, et la température environ 38°,5 F. La différence des logarithmes ordinaires de l'arc initial et de l'arc final est 0,424, qui, divisée par l'intervalle total, donne 0,1005 pour la différence des logarithmes pour une heure. La deuxième expérience, traitée de la même manière, donne 0,0352, ce qui représente l'effet du frottement au point de suspension, de la communication du mouvement au support, etc., en même temps que la résistance de l'air très raréfié à une pression de 0,97 pouce de mercure seulement. Comme nous avons des raisons de croire que μ' est indépendant de la densité, nous pouvons obtenir l'effet de l'air à la pression de 30,24 — 0,97 ou 29,27 pouces de mercure, en retranchant 0,0352 de 0,1005, ce qui donne 0,0653. Réduisant à 29 pouces de mercure pour la facilité de la comparaison, nous avons 0,0649. Chaque couple d'expériences doit être traité de la même manière. Comme la température était à peu près la même dans les expériences faites avec le même pendule, nous pouvons la supposer constante, et égale à la moyenne des températures pendant les expériences faites sous la pression atmosphérique entière. Les expériences réduites comprennent quatre couples pour chaque pendule, excepté le n° 21, où il n'a été fait que deux couples. Les résultats sont les suivants :

Pour la sphère de platine de $1\frac{1}{2}$ pouce.	0,0644	erreur moyenne.			0,0044
» laiton de $1\frac{1}{2}$ pouce.	0,180	»	»	.	0,024
» laiton de 2 pouces.	0,094	»	»	.	0,013
Pour la tige de cuivre	0,486	»	»	.	0,113

Pour le tube de laiton les résultats sont 0,145, 0,363, 0,338 et 0,305. Si nous rejetons le premier et si nous prenons la moyenne

des trois autres, nous obtenons 0,335, avec une erreur moyenne de 0,030. Pour déduire l des résultats moyens qui précèdent, nous n'avons qu'à diviser le module par 3600 et multiplier par τ, et pour les expériences avec les sphères nous pouvons prendre $\tau = 1$.

La manière de calculer l d'après la théorie dans le cas d'une sphère suspendue à un fil fin a déjà été expliquée. Afin de montrer séparément l'influence du fil, je donne les détails intermédiaires du calcul.

	Sphère		
	de 1,44 p.	de 1,46 p.	de 2,06 p.
k', pour la sphère seule....	0,326	0,320	0,220
$\Delta k'$, correction due au fil....	0,130	0,130	0,045
Somme à substituer dans (169).....	0,456	0,450	0,265

La formule (168), qui s'applique à une sphère suspendue à un fil, est applicable à une longue tige cylindrique, si nous y faisons $M = 0$. Par suite, la même formule (169) qui a été employée pour une sphère peut s'appliquer à une tige cylindrique, si nous supposons que k' se rapporte à la tige. Pour la tige de cuivre, $k' = 1,107$ et pour le tube, $k' = 0,2561$.

Voici les résultats pour les trois sphères et les cylindres :

	N° 1.	N° 3.	N° 6.	N° 21.	N° 35-36.
1000000l, d'après l'expérience.	41	115	60	315	206
d'après la théorie...	39	106	60	237	156
Différence.........	+ 2	+ 9	0	+ 78	+ 50

On voit que les expériences sur les sphères sont presque exactement représentées. Les différences entre les résultats de la théorie et de l'observation sont beaucoup plus grandes dans le cas des longs cylindres. Quelque grandes que paraissent ces différences, elles sont à peine en dehors des limites des erreurs d'observation, quoique très probablement elles les dépasseraient de beaucoup dans une série d'expériences faites précisément en vue de déterminer le décrément de l'arc d'oscillation. On devait prévoir que les résultats du calcul seraient inférieurs à ceux de l'observation, parce que dans chaque expérience on n'a relevé que deux arcs, de sorte qu'il manque les données nécessaires pour éliminer l'influence de la par-

tie de la résistance qui ne varie pas comme la première puissance de la vitesse.

78. J'en ai fini avec la comparaison de la théorie et de l'expérience; mais, avant de clore cette seconde partie, j'ai à présenter quelques remarques générales.

Quand une théorie nouvelle est émise, il convient de se demander jusqu'à quel point cette théorie fait violence aux notions précédemment adoptées sur le même sujet. La théorie que je présente a à peine le droit d'être appelée nouvelle, puisque les équations différentielles partielles du mouvement ont été données il y a trente ans par Navier, et ont été depuis obtenues par divers mathématiciens en partant de principes différents; mais l'application de la théorie à l'expérience réelle n'avait été faite que dans quelques cas douteux, relatifs à l'écoulement des liquides à travers les tubes capillaires; celle que je présente, ainsi que la détermination de la valeur numérique de la constante μ', sont, je crois, entièrement nouvelles. Examinons donc, en premier lieu, la grandeur de la pression tangentielle dont la théorie nous oblige à supposer l'existence dans l'air ou dans l'eau.

Pour la clarté des idées, concevons une masse d'air ou d'eau se mouvant par couches horizontales, de manière que chaque couche se meuve uniformément dans une direction horizontale donnée, tandis que la vitesse va en croissant, de bas en haut, à raison d'un pouce par seconde pour chaque pouce de hauteur. Le glissement dans la direction du plan horizontal est donc égal à l'unité, et, par suite, la pression tangentielle rapportée à l'unité de surface est égale à μ ou $\mu'\rho$. La grandeur absolue de ce glissement unité ne dépend évidemment que de l'unité arbitraire de temps, que l'on suppose ici être la seconde. Dans le cas supposé, on voit aisément que les particules situées à un instant sur une ligne verticale sont situées, à l'expiration d'une seconde, sur une droite inclinée d'un angle de 45° sur l'horizon. Égalant la pression tangentielle $\mu'\rho$ à la pression normale due à une hauteur h de fluide, nous avons $h = g^{-1}\mu'$, g étant la force de la gravité. Prenons $g = 386$, $\mu' = (0,116)^2$ pour l'air, $\mu' = (0,0564)^2$ pour l'eau, nous avons $h = 0,0000348б$ pouce anglais pour l'air, et $h = 0,00000824\text{I}$ pouce pour l'eau, ou environ $\frac{1}{30000}$ de pouce pour l'air, et moins de

$\frac{1}{100000}$ de pouce pour l'eau. Si nous cherchons quel doit être le côté d'un carré tel que la pression tangentielle totale sur une surface égale à ce carré s'élève à un seul grain, en supposant que la densité de l'air est à celle de l'eau dans le rapport de 1 à 836, et que le poids de 1 pouce cube d'eau est 252,6 grains, nous trouvons 25 pieds 8 pouces pour l'air, et 1 pied 10 pouces pour l'eau. Il est clair que l'influence de pareilles forces doit être insignifiante dans la plupart des cas.

79. Dans un précédent Mémoire, j'ai cherché l'effet du frottement intérieur sur la propagation du son, en prenant le cas le plus simple de la succession indéfinie d'ondes planes ([1]). J'ai trouvé que cet effet consiste d'abord en une extinction graduelle du mouvement, puis en une diminution de la vitesse de propagation, ces deux effets étant plus considérables pour des ondes courtes que pour les longues. Le second effet, comme je l'ai fait remarquer, serait contraire au résultat d'une expérience de M. Biot, à moins que l'on ne supposât le terme qui le représente si petit qu'il pût être négligé. J'ai aujourd'hui le moyen de calculer la valeur numérique du terme en question, et de décider ainsi si la théorie est ou non en désaccord avec le résultat de l'expérience de M. Biot.

D'après l'expression donnée dans le Mémoire cité plus haut, on a pour la diminution proportionnelle de la vitesse de propagation

$$\frac{8\pi^2\mu'^2}{9\lambda^2 V^2},$$

λ étant la longueur d'onde et V la vitesse du son. Pour prendre un cas aussi désavantageux que possible, supposons λ égal à 1 pouce seulement, ce qui correspondrait à une note trop aigue pour être perceptible à l'oreille humaine. Prenant la vitesse du son dans l'air égale à 1000 pieds par seconde, on trouve pour le logarithme ordinaire de l'expression écrite ci-dessus $\overline{11},0428$, de sorte qu'une onde aurait à parcourir près de 100000000000 pouces, ou environ 1578000 milles, avant que le retard dû au frottement s'élevât à 1 pied. Il est clair que l'introduction du frottement intérieur laisse la théorie du son dans l'état où elle était, en ce qui regarde la

([1]) *Phil. Trans. de Cambridge*, vol. VII, p. 302.

vitesse de propagation, au moins quand il s'agit de sa propagation à l'air libre.

L'effet du frottement sur l'intensité du son dépend de la première puissance de μ'. Dans le cas d'une succession indéfinie d'ondes planes, on reconnaît que, durant le temps t, l'amplitude de la vibration est diminuée dans le rapport de 1 à e^{-ct}, et, par conséquent, l'intensité dans le rapport de 1 à e^{-2ct}, la valeur de c étant

$$c = \frac{8\pi^2\mu'}{3\lambda^2}.$$

Posons $\lambda = 1$, $t = 1$, nous avons $\frac{1}{0,4923}$ ou à peu près $\frac{2}{1}$ pour le rapport dans lequel l'intensité est altérée en une seconde dans le cas d'une série d'ondes de 1 pouce de long. Le taux de la diminution décroît très rapidement à mesure que la longueur d'onde augmente, de sorte que, dans le cas d'une série d'ondes de 1 pied de long, l'intensité diminue en une seconde dans le rapport de 1 à 0,995095, ou de 201 à 200 à peu près. On voit donc que, dans tous les cas ordinaires, la diminution d'intensité due au frottement peut être négligée auprès de celle qui est produite par la divergence. Si nous avions un moyen exact de mesurer l'intensité d'un son, peut-être deviendrait-il possible, dans le cas des sons aigus, de mettre en évidence l'effet du frottement intérieur, qui produirait une diminution d'intensité plus rapide que celle qui répondrait à l'accroissement de la distance au centre de divergence.

Section II.

Suggestions relatives à des expériences à faire.

80. Je sais bien que de simples propositions d'expériences ne forment pas, en général, un sujet propre à être présenté à une Société savante. Néanmoins, comme il arrive souvent, en raison de la division du travail, qu'une personne porte particulièrement son attention sur les recherches théoriques relatives à une branche de la science, et une autre sur les recherches expérimentales, il n'est pas toujours inutile au théoricien de mettre en évidence la nature des documents qu'il est le plus important de demander

à l'expérience. J'espère donc qu'il me sera permis de signaler quelques idées relatives aux expériences qui intéressent la théorie du frottement intérieur. J'omettrai, d'ailleurs, tous les détails qui sont plus spécialement du ressort de l'expérimentation.

Les expériences qui ont trait plus ou moins directement à la théorie du frottement intérieur peuvent se proposer l'un des buts que voici : d'abord, d'éprouver plus sévèrement l'exactitude de la théorie; en second lieu, de déterminer l'indice de frottement de différents gaz, liquides ou solutions, de rechercher comment l'indice de frottement d'un gaz dépend de sa pression, de sa température et de son degré d'humidité; ou de tâcher de mettre en évidence la loi suivant laquelle l'indice de frottement d'un mélange de gaz dépend des indices des gaz qui le composent : troisièmement, enfin, de mesurer la longueur du pendule à secondes, ou ses variations d'un lieu de la surface de la terre à un autre.

81. *Premier but.* — La théorie a déjà été soumise à une très sérieuse épreuve au moyen des expériences de Baily et autres savants. Néanmoins, il reste quelques incertitudes dans la comparaison de la théorie et de l'expérience, qui proviennent de l'influence de causes modificatrices dont la théorie ne peut que signaler l'existence et estimer l'effet, et dont l'influence cependant n'est pas assez petite pour se confondre avec les erreurs d'observation. De plus, les expériences sur le décrément de l'arc d'oscillation font presque complètement défaut. On soumettrait la théorie à une très bonne épreuve en faisant osciller, dans l'air et dans le vide, le système suivant de pendules :

N° 1. Une boule de 2 pouces ou 1 pouce $\frac{1}{2}$, suspendue à un fil fin;

N° 2. Une très petite boule suspendue au même fil;

N° 3. Une longue tige cylindrique de quelques dixièmes de pouce de diamètre;

N° 4. Un cylindre de 3 à 4 pouces de longueur seulement, de même diamètre que le précédent, suspendu au même fil que le n° 1.

Le tube où l'on ferait le vide devrait être de dimensions assez grandes pour rendre la correction due à l'emprisonnement de l'air

moindre que les erreurs d'observation ou tout au plus de même ordre de grandeur. L'appareil employé par le colonel Sabine serait très convenable. Si le tube n'était pas de largeur suffisante, il faudrait qu'on pût l'enlever pour faire osciller le pendule dans l'air.

On devra, dans toutes les expériences, observer avec soin l'arc d'oscillation à plusieurs reprises pendant la durée du mouvement, car l'observation de l'arc est tout aussi importante, au point de vue de la théorie, que celle de la durée de l'oscillation. En fait, s'il y avait quelque empêchement à la mesure de la durée, la seule observation de l'arc fournirait un contrôle très précieux de la théorie. Il faudrait seulement, dans ce cas, donner la valeur approchée de la durée d'oscillation dans l'air.

Dans le système d'expériences que je propose, les nos 1 et 3 sont les pendules principaux; les nos 2 et 4 sont introduits pour servir à déterminer certaines petites corrections que doivent recevoir les résultats des nos 1 et 3. Le no 2 est destiné à débarrasser le no 1 de l'influence du fil, et le no 4 à débarrasser le no 3 de l'effet de la résistance éprouvée par la petite portion de la tige la plus voisine de son extrémité. Les durées d'oscillation des quatre pendules devront être à peu près les mêmes, bien qu'il en doive résulter de légères différences dans les longueurs des fils nos 1, 2 et 4.

La théorie montre que, pour un pendule donné, le facteur n est une fonction de la durée d'oscillation. C'est un résultat qui semble à peine avoir été soupçonné par ceux qui se sont occupés d'expériences sur le pendule, ou qui a été tout au plus mentionné comme possible [1], et, par conséquent, il y aurait lieu de le vérifier par une expérience directe. Pour ma part, je le considère comme si intimement lié aux principes fondamentaux de la théorie, que, si cette théorie était confirmée à d'autres points de vue, je crois qu'il faudrait accepter ce résultat sur la foi de cette théorie seule. La comparaison directe avec l'expérience présenterait cette difficulté, qu'elle exigerait l'emploi d'une horloge de marche par-

---

(1) On doit remarquer cependant que, dans un Mémoire subséquent (*Astronomische Nachrichten*, n° 223, p. 106), Bessel a déduit d'autres expériences que la valeur de k est plus grande pour le long pendule que pour le pendule court. [La traduction de ce Mémoire complet est insérée dans ce Volume, p. 71.]

faite, et pouvant en même temps se prêter à faire en un jour des nombres d'oscillations extrêmement différents. On pourrait cependant vérifier indirectement cette conséquence de la théorie en observant l'arc d'oscillation, observation également facile quelle que soit la durée de l'oscillation.

82. *Deuxième but.* — D'après la théorie, l'indice de frottement peut se déduire d'expériences, soit sur l'amplitude, soit sur la durée de l'oscillation. C'est à l'observation de décider quelle est la méthode qui donnera les résultats les plus sûrs. Si les résultats déduits de l'observation des arcs paraissent aussi dignes de confiance que ceux qu'on obtiendrait de la durée, le moyen le plus commode de déterminer μ' pour un fluide élastique sera probablement d'observer les arcs, parce que l'observation de la durée n'exigerait pas, dans ce cas, une précision extraordinaire. Quant à la forme du pendule, la meilleure serait probablement celle d'une tige cylindrique, si l'on ne veut employer qu'un seul pendule. L'observation des arcs paraît être le seul procédé pratique de déterminer l'influence de la température sur l'indice du frottement, à moins que le pendule ne soit extrêmement léger, ou à moins que l'observateur ne se contente de la série limitée des températures qu'on peut obtenir en faisant les observations aux différentes époques de l'année. Avec un appareil chauffé ou refroidi artificiellement, il serait difficile de se mettre à l'abri de petites variations inconnues de la température, qui produiraient des variations dans la marche du pendule, par suite des dilatations ou des contractions qu'il éprouverait; et de telles variations vicieraient le résultat de l'expérience, en ce qui regarde la durée de l'oscillation, parce que l'influence du gaz sur la durée de l'oscillation se déduit de la petite différence entre deux quantités assez grandes que l'on observe directement. Mais l'effet du gaz sur l'arc produit à lui seul la plus grande partie de la diminution totale que l'on observe, et par conséquent de petites fluctuations de la température seront sans importance, si ce n'est par les courants qu'elles pourraient occasionner; et ce dernier effet même n'a pas une grande importance, parce que les forces qui en résultent n'ont rien de périodique et dépendent de la phase de vibration du pendule.

La grande difficulté que présente l'observation de la durée d'oscillation d'un pendule oscillant dans un liquide provient de la rapidité avec laquelle s'éteignent les oscillations. La meilleure forme à donner à un pendule destiné à osciller dans un liquide serait celle d'une sphère suspendue à un fil fin. Le vase contenant le liquide et la sphère immergée devra être assez large pour rendre insensible la correction due à l'influence des parois. Mais l'indice de frottement d'un liquide se déterminerait probablement mieux à l'aide d'expériences se rapprochant de celles de Coulomb, ou peut-être par l'écoulement lent des liquides à travers des tubes étroits.

Parmi les gaz pour lesquels μ' devrait être déterminé expérimentalement, il faudrait mentionner le gaz d'éclairage, en raison de l'application pratique qu'il semble possible de faire du résultat à la pose des conduites à gaz. Le calcul de la résistance dans un tuyau circulaire est très simple : il est donné dans l'art. 9 de mon premier Mémoire. Conformément aux équations de condition adoptées dans le Mémoire actuel, nous devons y faire $U = 0$, U désignant dans cet article la vitesse au contact de la paroi. On voit que la pression dépensée pour vaincre le frottement varie comme la vitesse moyenne divisée par le carré du diamètre du tuyau, ou comme la dépense divisée par la quatrième puissance du diamètre. Ceci suppose que le mouvement est assez lent pour permettre de négliger la pression qui peut être dépensée à produire des tourbillons, auprès de celle qui est dépensée à vaincre ce qui constitue réellement le frottement intérieur.

83. *Troisième but.* — En ce qui regarde les expériences de détermination de la longueur du pendule à secondes, la théorie du frottement intérieur nous permet de calculer, pour certaines formes de pendule, la correction due à l'inertie de l'air; mais elle ne donne pas d'indication particulière sur la manière de faire ces expériences. La théorie ordinaire de l'Hydrodynamique montre à elle seule la nécessité d'écarter tout obstacle au libre mouvement de l'air dans le voisinage du pendule, si l'on veut calculer d'après la théorie la correction totale de réduction au vide.

Puisque nous avons obtenu la solution théorique pour le cas d'une longue tige cylindrique, ou d'une pareille tige combinée

avec une boule, nous pouvons regarder un pendule ainsi formé, qui est réversible dans l'air, comme également réversible dans le vide; car il importe peu que le pendule soit ou ne soit pas réellement réversible dans le vide, pourvu que, s'il ne l'est pas, nous connaissions la correction à appliquer en conséquence.

NOTE A. Article 65.

Appliquons les équations générales (2) et (3) au fluide qui entoure un solide de révolution tournant autour de son axe, d'un mouvement soit uniforme, soit variable, en supposant le fluide primitivement en repos ou tournant en anneaux autour de l'axe de symétrie.

Nous pouvons remarquer tout d'abord que le fluide se mouvra toujours en formant des anneaux autour de l'axe de symétrie. Car soit P un point de l'espace, L une ligne passant par ce point, et située dans un plan mené par le point P et l'axe de symétrie; et supposons qu'à la fin du temps t, la vitesse du point P ait une composante u' dirigée suivant L. Considérons maintenant le cas où la vitesse angulaire du solide et la vitesse initiale du fluide seraient de sens contraire à ce qu'elles étaient d'abord, toutes les autres conditions du mouvement restant les mêmes. Il résulte de la symétrie qu'à la fin du temps t la composante suivant L de la vitesse en P sera encore égale à u', puisque le mouvement du solide et le mouvement initial du fluide, qui forment les données de l'un des problèmes, ne diffèrent des quantités correspondantes dans l'autre problème qu'en ce qui regarde le sens du mouvement rotatoire, qui n'a aucune relation avec la distinction du mouvement rectiligne en avant ou en arrière suivant une droite située dans un plan passant par l'axe de rotation. Mais, d'autre part, puisque toutes nos équations sont linéaires par rapport à la vitesse, il s'ensuit que, dans le second problème, la vitesse sera la même que dans le premier avec un signe contraire, et par conséquent la vitesse en P dans la direction de la ligne L sera égale à $-u'$. Donc $u' = -u'$ et, par suite, $u' = 0$; le mouvement total se réduit donc à un mouvement en anneaux autour de l'axe de rotation.

Prenons l'axe de rotation pour axe des z; soit ω l'angle qu'un plan passant par cet axe et par le point P fait avec le plan des xy, et soit v' la vitesse en P. Alors

$$u = -v' \sin\omega, \qquad v = v' \cos\omega, \qquad w = 0,$$

et toutes les quantités inconnues du problème sont fonctions de t, z et ϖ, où $\varpi = \sqrt{x^2 + y^2}$. Substituant dans les équations (2) les valeurs précédentes de u, v et w et faisant $\omega = 0$ après avoir différencié, comme il est permis de le faire, on obtient

$$\frac{dp}{d\varpi} = 0, \qquad \frac{dp}{dz} = 0,$$

(179) $$\mu\left(\frac{d^2 v'}{dz^2} + \frac{d^2 v'}{d\varpi^2} + \frac{1}{\varpi}\frac{dv'}{d\varpi} - \frac{v'}{\varpi^2}\right) = \rho\frac{dv'}{dt}.$$

Les deux premières de ces équations donnent $p =$ const., ou plutôt $p =$ une fonction de t que, pour la même raison que dans l'art. 7, nous avons le droit de supposer égale à zéro. La troisième équation, combinée avec les équations de condition, sert à déterminer v'.

Maintenant, dans le cas particulier d'un disque oscillant, l'équation (179) devient, d'après le mode d'approximation adopté dans l'art. 8,

$$\mu \frac{d^2 v'}{dz^2} = \rho \frac{dv'}{dt}, \tag{180}$$

équation qui, en fait, est la même que la seconde des équations (8). La solution ainsi obtenue est, comme on l'a vu,

$$v' = \varpi f(z, t), \tag{181}$$

f désignant une fonction, dont il n'est pas besoin d'écrire ici la forme, qui satisfait à l'équation (180) lorsqu'on la met à la place de v'. Maintenant, on voit immédiatement que l'expression (181) satisfait à l'équation exacte (179), et que, par conséquent, la solution approchée obtenue par la méthode de l'art. 8 est exacte en fait, excepté toutefois pour l'extrême bord du disque, ce que nous avions à démontrer.

Passant des coordonnées semi-polaires aux coordonnées polaires, en faisant $z = r\cos\theta$ et $\varpi = r\sin\theta$, nous tirons de (179), en écrivant $\mu'\rho$ au lieu de μ,

$$\frac{d^2 v'}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dv'}{dr} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{dv'}{d\theta}\right) - \frac{v'}{r^2 \sin^2\theta} = \frac{1}{\mu'}\frac{dv'}{dt}. \tag{182}$$

Supposons maintenant que le solide soit une sphère ayant son centre à l'origine. Soit a son rayon, ς sa vitesse angulaire, et supposons le fluide primitivement en repos. Alors il y a à déterminer v' d'après l'équation générale (182) et les équations de condition que voici :

$$v' = 0 \text{ pour } t = 0, \qquad v' = a\varsigma\sin\theta \text{ pour } r = a, \qquad v' = 0 \text{ pour } r = \infty.$$

Toutes ces équations sont satisfaites en supposant

$$v' = v''\sin\theta,$$

v'' étant une fonction de r et t seulement. Nous tirons de (182)

$$\frac{d^2 v''}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dv''}{dr} - \frac{2v''}{r^2} = \frac{1}{\mu'}\frac{dv''}{dt}. \tag{183}$$

Si nous supposons ς constant, v'' tendra indéfiniment à devenir constant à mesure que t croîtra indéfiniment, et à la limite $\frac{dv''}{dt} = 0$.

d'où nous tirons de (183) et des équations de condition $v'' = a\,8$ pour $r = a$, $v'' = 0$ pour $r = \infty$,

$$v'' = \frac{8a^3}{r^2}, \qquad v' = \frac{8a^3}{r^2}\sin\theta.$$

C'est la solution à laquelle il a été fait allusion dans l'art. 8 de mon Mémoire *Sur les théories du frottement intérieur dans les fluides en mouvement*, etc.

NOTE B. Article 65.

Reprenons le problème de l'art. 7, mais, au lieu de supposer le mouvement du plan périodique, supposons que le plan et le fluide sont primitivement au repos et que le plan se meut avec une vitesse constante V, et adoptons la même notation que dans l'art. 7.

Les équations générales (8) restent les mêmes que précédemment, mais les équations de condition deviennent, dans ce cas,

$$v = 0 \text{ pour } t = 0 \text{ depuis } x = 0 \text{ jusqu'à } x = \infty,$$
$$v = \text{V} \text{ pour } x = 0 \text{ depuis } t = 0 \text{ jusqu'à } t = \infty.$$

D'après le théorème de Fourier et un autre théorème de même espèce, v peut se développer entre les limites de x, zéro et l'infini, sous la forme suivante :

(184)
$$\begin{cases} v = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty \cos\alpha x \cos\alpha x' \varphi(x', t)\, dx'\, d\alpha \\ \quad -\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty \sin\alpha x \sin\alpha x' \psi(x', t)\, dx'\, d\alpha. \end{cases}$$

En fait, v pourrait se développer au moyen de l'une ou l'autre de ces expressions séparément, et par conséquent peut se développer d'une infinité de manières par la somme des deux expressions. Si cependant v avait été développé par la première seule, ses dérivées par rapport à x ne pourraient s'obtenir par la différentiation sous les signes $\int$, puisque les dérivées d'ordre impair ne s'annulent pas pour $x = 0$; mais il faudrait avoir recours à certaines formules que j'ai développées dans un précédent Mémoire [1]. Une semblable remarque s'ap-

---

[1] *Sur les valeurs critiques des sommes de séries périodiques* (*Phil. Trans. de Cambridge*, t. VIII, p. 533).

plique au second développement, par suite de cette circonstance que v lui-même et ses dérivées d'ordre pair ne s'annulent pas en même temps que x. Mais en combinant les deux développements, nous pouvons obtenir les dérivées de v, jusqu'à tel ordre i qu'il nous plaira de fixer, par une simple différentiation sous les signes somme. Car nous pouvons évidemment exprimer la fonction finie v, et cela d'un nombre infini de manières, comme la somme de deux fonctions finies $\varphi(x, t)$ et $\psi(x, t)$ qui, comme v, s'annulent pour $x = \infty$, et qui soient telles que les dérivées impaires de la première, et les dérivées paires de la seconde, jusqu'à l'ordre i, aussi bien que $\psi(x, t)$ lui-même, s'annulent pour $x = 0$. Substituant maintenant dans la seconde équation (8) l'expression de v donnée par (184), nous voyons que l'équation est satisfaite pourvu que

$$\frac{d\varphi}{dt} + \mu'\alpha^2\varphi = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\psi}{dt} + \mu'\alpha^2\psi = 0.$$

Ces équations donnent

$$\varphi(x', t) = \chi(x')e^{-\mu'\alpha^2 t}, \qquad \psi(x', t) = \sigma(x')e^{-\mu'\alpha^2 t},$$

où χ et σ représentent deux nouvelles fonctions arbitraires. Substituant dans (184) et alors passant à la première des équations de condition, nous obtenons

$$0 = \chi(x) + \sigma(x),$$

d'où

$$\sigma(x) = -\chi(x)$$

et

$$(185) \quad \begin{cases} v = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty \cos\alpha(x + x')e^{-\mu'\alpha^2 t}\chi(x')\,dx'\,d\alpha \\[2ex] \quad = \dfrac{1}{\sqrt{\pi\mu' t}}\displaystyle\int_0^\infty e^{-\frac{(x'+x)^2}{4\mu' t}}\chi(x')\,dx'. \end{cases}$$

La seconde des équations de condition exige que

$$V = \frac{1}{\sqrt{\pi\mu' t}}\int_0^\infty e^{-\frac{x'^2}{4\mu' t}}\chi(x')\,dx' = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-s^2}\chi(2s\sqrt{\mu' t})\,ds.$$

Puisque le second membre de cette équation doit être indépendant de t, nous avons $\chi(x') = \text{const.}$, et cette constante doit être égale à V, car

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-s^2}\,ds = 1.$$

Substituant cette valeur de $\chi(x')$ dans (185), nous obtenons

$$(186)\qquad v = \frac{V}{\sqrt{\pi\mu' t}}\int_0^\infty e^{-\frac{(x+x')^2}{4\mu' t}}\,dx'.$$

Pour l'objet de notre recherche actuelle, nous n'avons besoin que de la valeur de $\frac{dv}{dx}$ pour $x=0$, que nous pouvons désigner par $\left(\frac{dv}{dx}\right)_0$. Nous tirons de (186)

$$(187)\qquad \left(\frac{dv}{dx}\right)_0 = -\frac{V}{\sqrt{\pi\mu' t}}.$$

Supposons maintenant que le plan se meuve d'une façon quelconque, de manière que sa vitesse à la fin du temps t soit égale à $f(t)$. Nous pouvons évidemment obtenir le résultat relatif à ce cas en écrivant $f'(t')\,dt'$ au lieu de V, et $t-t'$ au lieu de t dans (187), et intégrant par rapport à t'. Nous obtenons ainsi

$$(188)\quad \left(\frac{dv}{dx}\right)_0 = -\frac{1}{\sqrt{\pi\mu'}}\int_{-\infty}^{t} f'(t')\frac{dt'}{\sqrt{t-t'}} = -\frac{1}{\sqrt{\pi\mu'}}\int_0^\infty f'(t-t_1)\frac{dt_1}{\sqrt{t_1}}.$$

Pour appliquer ce résultat au cas d'un disque oscillant, représentons par $r\frac{d\theta}{dt} = r\,F(t)$ la vitesse d'un anneau quelconque, et par G le moment de la force totale du fluide sur le disque. Alors

$$G = 4\pi\mu'\rho\int_0^a r^2\left(\frac{dv_0}{dx}\right)_0 dr,$$

et $\left(\frac{dv}{dx}\right)_0$ se tirera de (188) en y substituant $r\,F(t)$ à $f(t)$. On trouve ainsi

$$(189)\qquad G = -\sqrt{\pi\mu'}.\rho a^4\int_0^\infty F'(t-t_1)\frac{dt_1}{\sqrt{t_1}}.$$

Si l'on suppose la vitesse angulaire du disque représentée par $A\sin nt$, A étant constant, on peut faire dans (189) $F(t) = A\sin nt$, et l'on obtiendrait après intégration la même expression de G que l'on a obtenue dans l'art. 8 par un procédé beaucoup plus simple. Supposons cependant qu'antérieurement à l'époque à partir de laquelle est mesuré le temps t le disque fût au repos, et que la vitesse angulaire subséquente soit exprimée par $A_t \sin nt$, A_t étant une fonction lentement variable de t. Alors

$$F(t) = 0 \text{ pour } t < 0, \qquad F(t) = A_t \sin nt \text{ pour } t > 0.$$

En substituant dans (189), on a

$$(190)\qquad G = -\sqrt{\pi\mu}\,.\,2a^2 n\int_0^t A_{t-t_1}\cos n(t-t_1)\frac{dt_1}{\sqrt{t_1}}.$$

Si maintenant on traite A_t comme un paramètre variant lentement, on déduit d'une formule donnée par M. Airy, qui l'a obtenue par la méthode de la variation des paramètres,

$$(191)\qquad \frac{dA_t}{dt} = \frac{G}{I}\sin nt.$$

I désigne ici le moment d'inertie. Dans l'expression de G, nous pouvons remplacer A_{t-t_1} sous le signe somme, par A_t en dehors de ce signe, parce que A_t est supposé varier si lentement, que A_{t-t_1} ne diffère pas beaucoup de A_t tant que t_1 est assez petit pour rendre l'intégrale assez considérable. Si l'on fait cette simplification et si l'on substitue dans (191), on obtient

$$(192)\qquad \frac{dA_t}{A_t\,dt} = -c\sin nt\int_0^t \cos n(t-t_1)\frac{dt_1}{\sqrt{t_1}},$$

où $c = \sqrt{\pi\mu}\,.\,2a^2 n I^{-1}$. Si donc A_0 est la valeur initiale de A_t et A sa valeur finale, on déduit de (192)

$$(193)\qquad \log\frac{A_0}{A} = c\int_0^t\left[\sin nt\int_0^t \cos n(t-t_1)\frac{dt_1}{\sqrt{t_1}}\right]dt.$$

Soit maintenant $A_0 + \Delta A_0$ ce que deviendrait A_0 si, pendant que l'arc final A et le temps total t restent les mêmes, le mouvement avait eu lieu pendant un temps indéfini avant l'époque à partir de laquelle t est mesuré, auquel cas la limite supérieure de l'intégrale comprise dans l'expression de G aurait été ∞ au lieu de t. Alors

$$(194)\qquad \log\frac{A_0+\Delta A_0}{A} = c\int_0^t\left[\sin nt\int_0^\infty \cos n(t-t_1)\frac{dt_1}{\sqrt{t_1}}\right]dt.$$

d'où, en soustrayant membre à membre l'équation (196) de (194), on tire

$$\log\frac{A_0+\Delta A_0}{A_0} = c\int_0^t\left[\sin nt\int_t^\infty \cos n(t-t_1)\frac{dt_1}{\sqrt{t_1}}\right]dt.$$

qui devient, après intégration par parties,

$$(195)\qquad \left\{\begin{aligned} \log\frac{A_0+\Delta A_0}{A_0} = \frac{c}{4n}\Bigg[\sqrt{\frac{\pi}{2n}} - 2\sqrt{t}\cos nt - \cos 2nt\int_t^\infty \cos nt\frac{dt}{\sqrt{t}} \\ + (2nt - \sin 2nt)\int_t^\infty \sin nt\frac{dt}{\sqrt{t}}\Bigg].\end{aligned}\right.$$

Or t est supposé très grand : en fait, dans les expériences de Coulomb, on observait 10 oscillations, de sorte que $nt = 10\pi$. Mais, lorsque t est tout à fait grand, les deux intégrales

$$\int_t^\infty \cos nt \frac{dt}{\sqrt{t}} \quad \text{et} \quad \int_t^\infty \sin nt \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

peuvent être mises sous la forme

$$-\mathrm{P}\sin nt + \mathrm{Q}\cos nt \quad \text{et} \quad \mathrm{P}\cos nt + \mathrm{Q}\sin nt,$$

où

$$\mathrm{P} = n^{-1}t^{-\frac{1}{2}} - 1.3.2^{-2}n^{-3}t^{-\frac{5}{2}} + \ldots.$$

$$\mathrm{Q} = 1.2^{-1}n^{-2}t^{-\frac{3}{2}} - 1.3.5.2^{-3}n^{-4}t^{-\frac{7}{2}} + \ldots,$$

séries qui sont d'abord très rapidement convergentes et qui nous permettent de calculer les valeurs numériques des intégrales avec une extrême facilité. Ces expressions ont été données pour la première fois par M. Cauchy, dans le cas des intégrales de Fresnel, auxquelles les intégrales ci-dessus sont équivalentes. On les obtient aisément en intégrant par parties, bien que ce ne soit pas ainsi qu'elles ont été démontrées par M. Cauchy. Si maintenant on substitue les expressions ci-dessus aux intégrales dans l'équation (195), les termes qui contiennent $t^{\frac{1}{2}}$ se détruisent l'un l'autre, et pour des valeurs quelconques de t, le terme le plus important après le premier contient $t^{-\frac{1}{2}}$. Mais, puisque t est supposé correspondre à la fin d'une oscillation, de sorte que nt est un multiple de π, le coefficient de ce terme s'annule, et le terme le plus important qui reste en réalité ne contient que $t^{-\frac{3}{2}}$. Par suite, en négligeant des quantités insensibles, on tire de (195

(196) $$\log \frac{\mathrm{A}_0 + \Delta\mathrm{A}_0}{\mathrm{A}_0} = \frac{c}{4n}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

De (194) on déduit, en effectuant les intégrations,

$$\log \frac{\mathrm{A}_0 + \Delta\mathrm{A}_0}{\mathrm{A}} = c\sqrt{\frac{\pi}{2n}} \int_0^t \sin nt(\cos nt + \sin nt)\,dt,$$

$$= \frac{c}{4n}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}[2nt + 1 - \cos 2nt + \sin 2nt$$

qui devient, puisque nt est un multiple de π,

(197) $$\log \frac{\mathrm{A}_0 + \Delta\mathrm{A}_0}{\mathrm{A}} = \frac{c}{4n}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}\,2nt.$$

La comparaison de (196) et (197) donne

$$2nt\log\frac{A_0+\Delta A_0}{A_0}=\log\frac{A_0+\Delta A_0}{A}=\log\frac{A_0+\Delta A_0}{A_0}+\log\frac{A_0}{A},$$

d'où

$$\log\frac{A_0+\Delta A_0}{A_0}=(2nt-1)^{-1}\log\frac{A_0}{A}, \tag{198}$$

et la même relation existe entre les logarithmes ordinaires des arcs, qui sont proportionnels aux logarithmes népériens. Or $\operatorname{Log}A_0-\operatorname{Log}A$ est la quantité qui se déduit immédiatement de l'expérience, et $\operatorname{Log}(A_0+\Delta A_0)-\operatorname{Log}A_0$ est la correction qu'il faut appliquer, en raison de cette circonstance que le mouvement commence à partir du repos. Au lieu d'appliquer la correction proportionnelle $+(2nt-1)^{-1}$ à la différence des logarithmes, on peut l'appliquer à la valeur calculée de $\sqrt{\mu'}$, qui est proportionnelle à la différence des logarithmes. Dans les expériences de Coulomb, on a observé 10 oscillations, donc $2nt=20\pi$, et $(2nt-1)^{-1}=0{,}01617$; la valeur brute de $\sqrt{\mu'}$ étant $0{,}0555$, nous avons pour la correction $0{,}0009$, ce qui donne $\sqrt{\mu'}=0{,}0564$.

NOTE C. Article 50.

Les résultats dont il est question dans cet article ont été publiés d'abord sans démonstration; mais, comme la manière dont on les a obtenus est assez courte et n'est pas facile à trouver, j'ai pensé qu'il était utile d'en ajouter ici la démonstration.

Pour que les deuxièmes membres des équations (138) soient des différentielles exactes, il faut que l'on ait

$$(a)\qquad \frac{d\delta}{dy}+\frac{d\omega'''}{dx}=0,\qquad \frac{d\delta}{dz}+\frac{d\omega'}{dy}=0,\qquad \frac{d\delta}{dx}+\frac{d\omega''}{dz}=0,$$

$$(b)\qquad \frac{d\delta}{dz}-\frac{d\omega''}{dx}=0,\qquad \frac{d\delta}{dx}-\frac{d\omega'''}{dy}=0,\qquad \frac{d\delta}{dy}-\frac{d\omega'}{dz}=0,$$

$$(c)\qquad \frac{d\omega''}{dy}+\frac{d\omega'''}{dz}=0,\qquad \frac{d\omega'''}{dz}+\frac{d\omega'}{dx}=0,\qquad \frac{d\omega'}{dx}+\frac{d\omega''}{dy}=0.$$

Les équations (c) donnent

$$(d)\qquad \frac{d\omega'}{dx}=0,\qquad \frac{d\omega''}{dy}=0,\qquad \frac{d\omega'''}{dz}=0.$$

Dans le cas particulier où δ est nul, les équations (a), (b) et (d) donnent

$$d\omega' = 0, \qquad d\omega'' = 0, \qquad d\omega''' = 0,$$

et, par conséquent, ω', ω'' et ω''' sont constants, comme il a été établi à l'art. 50. Dans le cas général, les équations (a), (b) et (d) donnent. pour les différentielles de ω', ω'' et ω''', les expressions suivantes :

$$(e) \quad \left\{ \begin{aligned} d\omega' &= -\frac{d\delta}{dz}\,dy + \frac{d\delta}{dy}\,dz, \\ d\omega'' &= -\frac{d\delta}{dx}\,dz + \frac{d\delta}{dz}\,dx, \\ d\omega''' &= -\frac{d\delta}{dy}\,dx + \frac{d\delta}{dx}\,dy. \end{aligned} \right.$$

Pour que les seconds membres de ces équations soient des différentielles exactes, il faut qu'on ait

$$(f) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2\delta}{dy\,dz} = 0, &&\frac{d^2\delta}{dz\,dx} = 0, &&\frac{d^2\delta}{dx\,dy} = 0, \\ &\frac{d^2\delta}{dy^2} + \frac{d^2\delta}{dz^2} = 0, &&\frac{d^2\delta}{dz^2} + \frac{d^2\delta}{dx^2} = 0, &&\frac{d^2\delta}{dx^2} + \frac{d^2\delta}{dy^2} = 0, \end{aligned} \right.$$

et, par conséquent,

$$(g) \qquad \frac{d^2\delta}{dx^2} = 0, \qquad \frac{d^2\delta}{dy^2} = 0, \qquad \frac{d^2\delta}{dz^2} = 0.$$

Les équations (f) et (g) donnent

$$d\,\frac{d\delta}{dx} = 0, \qquad d\,\frac{d\delta}{dy} = 0, \qquad d\,\frac{d\delta}{dz} = 0,$$

de sorte que $\frac{d\delta}{dx}$, $\frac{d\delta}{dy}$ et $\frac{d\delta}{dz}$ sont constants. Substituant dans (e) et intégrant, puis substituant alors dans (138) les expressions résultantes pour ω', ω'' et ω''' et intégrant de nouveau, on obtiendra les résultats donnés dans l'art. 50.

Remarque sur le Mémoire de M. G. Stokes.

Le Mémoire de M. Stokes a fait faire un progrès immense à la théorie du pendule, en définissant d'une manière précise la cause du fait observé par Du Buat et par Bessel, et en permettant d'en calculer la valeur numérique. (Voir l'*Introduction historique* que j'ai placée en tête du Tome IV de ce Recueil, p. xxv.) Mais à l'époque où parut ce travail, il n'existait pas d'expériences suffisantes pour permettre de comparer avec sûreté la théorie nouvelle et l'observation. De là une lacune au sujet de laquelle je laisse la parole à M. Stokes lui même. Voici ce qu'il m'écrivait en répondant à la demande que je lui avais adressée, de publier la traduction de son grand Mémoire. (C. W.)

« Les plus importantes séries d'expériences dont je disposais pour comparer la théorie et l'observation étaient celles de Baily, qui avait cherché à déterminer l'influence de l'air sur la durée d'oscillation d'un pendule, en faisant osciller le même pendule dans l'air et dans un milieu très raréfié. Si le vide avait été absolu, ou du moins pratiquement parfait, tout aurait marché tout droit. Mais, comme la pression de l'air raréfié atteignait ordinairement un pouce environ de mercure, l'influence de l'air restant n'était nullement insensible, et il était nécessaire d'en corriger le résultat. Le calcul de cette correction exigeait la connaissance de la loi qui lie le coefficient de viscosité de l'air μ avec la densité ρ. M'appuyant sur une seule expérience de Sabine, faite avec l'hydrogène, gaz dont il est bien difficile de garantir la pureté absolue, surtout quand il n'est pas préparé par un chimiste de profession, j'ai supposé que μ variait proportionnellement à ρ, en d'autres termes, que ce que j'appelais l'*indice de frottement* μ' était indépendant de la densité. On sait aujourd'hui que c'est le coefficient de viscosité μ, et non l'indice μ', qui est indépendant de la densité. La supposition adoptée a donc eu pour conséquence de rendre trop faible l'influence de l'air restant; et, par suite, en comparant la différence observée des durées d'oscillation dans l'air à pression entière et sous faible pression à sa valeur théorique, j'en ai conclu une valeur trop petite du coefficient de viscosité.

» J'ai eu longtemps l'intention de calculer à nouveau les expériences de Baily en prenant μ, et non plus μ', indépendant de la densité, conformément à ce que nous savons aujourd'hui; et c'est là en réalité la cause qui a retardé la publication du troisième Volume de mes Mémoires. Un calcul rapide m'a fait voir que l'effet de cette correction serait d'accroître le coefficient de viscosité d'environ 40 pour 100 de sa valeur. Cet accroissement le rapprocherait de sa valeur vraie; je dis valeur vraie, parce que ce coefficient est aujourd'hui bien connu. Cependant il serait resté encore sensiblement trop faible. Cette faiblesse provient-elle de ce que la vitesse n'a pas été assez petite pour prévenir la formation de remous; provient-elle de quelque autre cause inconnue? C'est ce que je ne puis dire aujourd'hui. »

CONSTRUCTION

D'UN

PENDULE DE FORME SYMÉTRIQUE

A AXES RÉCIPROQUES;

PAR F.-W. BESSEL.

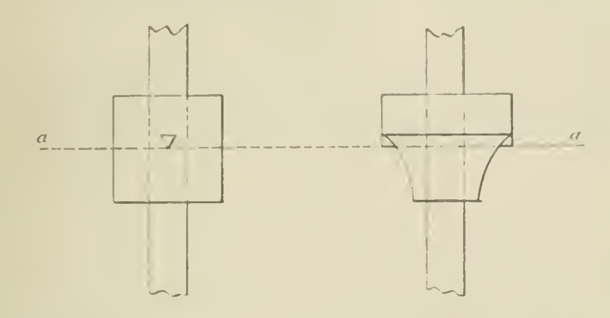
(*Astronomische Nachrichten*, t. XXX, p. 1; 1849.)

La distance que l'on doit donner aux deux couteaux sera prise égale à peu près à la longueur du pendule à secondes; il est nécessaire d'assigner à l'avance la valeur de cette distance, puisque les dimensions des diverses parties de l'appareil en dépendent, si bien que la construction devrait être disposée tout autrement pour une autre distance des couteaux. La valeur adoptée n'a d'ailleurs besoin d'être exacte que dans les limites de quelques pouces; deux pouces en plus ou en moins n'enlèvent rien de ses avantages à la construction que je propose. Aussi, pour permettre de profiter de cette latitude, je prendrai pour unité de longueur dans toutes les mesures la distance des couteaux.

Je prends pour unité de masse celle d'un cylindre de même matière que le pendule, dont le rayon et la hauteur sont égaux à l'unité de longueur adoptée.

Je compose le pendule de trois parties : une tige cylindrique, une lentille lourde et une légère; je donne aux deux lentilles la forme cylindrique, de façon que leurs axes soient perpendiculaires à celui de la tige et au plan d'oscillation. Quant aux couteaux, qui devraient constituer deux autres parties en plus, je les néglige dans le calcul, parce qu'ils n'altèrent pas sensiblement les durées d'oscillation, étant placés très près des points réciproques, centre

de mouvement et centre d'oscillation. Mais il sera bon de les disposer de façon que leur masse soit distribuée à peu près uniformément autour de ces centres, en leur donnant la forme que je dessine ici.



La pièce dans laquelle les couteaux sont fixés a autant de masse au-dessus qu'au-dessous de la ligne aa. Il n'y a pas d'intérêt à chercher à remplir cette condition avec exactitude ; une grossière approximation est suffisante.

Les masses des trois parties, dans l'ordre dans lequel je les ai énumérées, seront désignées par m, m', m''; leurs moments d'inertie par rapport à leurs centres de gravité, par μ, μ', μ''. Les distances des couteaux au milieu de la tige sont, par suite de la condition de symétrie, égales à $+\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$, le signe $+$ se rapportant au couteau qui est du côté de la lentille pesante. Les distances des centres des lentilles au milieu de la tige seront désignées par $\pm(\frac{1}{2}+k)$.

Si ρ est la distance du centre de gravité du pendule au milieu de la tige, on a

$$(1)\qquad (m+m'+m'')\rho=(m'-m'')(\tfrac{1}{2}+k),$$

la distance de ce centre de gravité au premier couteau (du côté de la lentille pesante) est donc $\frac{1}{2}-\rho$, et celle du même point au second couteau $\frac{1}{2}+\rho$, et l'on a

$$(2)\qquad \begin{cases} (m+m'+m'')(\frac{1}{2}-\rho)=\frac{1}{2}m-m'k+m''(1+k), \\ (m+m'+m'')(\frac{1}{2}+\rho)=\frac{1}{2}m+m'(1+k)-m''k. \end{cases}$$

De plus, les moments d'inertie de l'appareil par rapport aux

couteaux sont

$$(3)\qquad \begin{cases} \mu + \mu' + \mu'' + \dfrac{m}{4} + m'k^2 + m''(1+k)^2, \\[2ex] \mu + \mu' + \mu'' + \dfrac{m}{4} + m'(1+k)^2 + m''k^2. \end{cases}$$

Mais le pendule doit osciller dans des temps égaux sur chacun des deux couteaux, et dans le même temps qu'un pendule simple de longueur égale à l'unité de longueur. On a, d'après cela,

$$1 = \frac{\mu + \mu' + \mu'' + \dfrac{m}{4} + m'k^2 + m''(1+k)^2}{\frac{1}{2}m - m'k + m''(1+k)},$$

$$1 = \frac{\mu + \mu' + \mu'' + \dfrac{m}{4} + m'(1+k)^2 + m''k^2}{\frac{1}{2}m + m'(1+k) - m''k},$$

équations qui doivent être satisfaites simultanément et qui donnent

$$(4)\qquad k(1+k)(m'+m'') = \tfrac{1}{4}m - (\mu + \mu' + \mu'').$$

Telle est l'unique équation de condition du problème. Mais l'arbitraire qui semble rester encore dans la construction est beaucoup limité par certaines propriétés que doit avoir l'appareil. Il faut : 1° que le centre de gravité tombe entre les deux couteaux ($\rho < \frac{1}{2}$) et, de plus, il ne doit pas être trop près du premier de ces couteaux, parce que le moment de rotation de l'appareil devient bientôt trop petit, d'où résulterait une telle influence du frottement du couteau et de la résistance (du milieu) sur l'arc d'oscillation, que la durée de l'expérience deviendrait plus courte qu'il n'est à souhaiter ; 2° que k soit assez grand pour que les couteaux ne soient pas dans la périphérie des lentilles, mais en dehors de ces masses ; 3° que la longueur de la tige ne soit ni si petite qu'elle ne puisse dépasser les lentilles, ni si grande qu'elle rende inutilement incommode le maniement du pendule ; 4° enfin que m'' ne soit pas si petit que l'enveloppe qui forme la lentille creuse doive avoir une minceur exceptionnelle.

Par contre, on peut prendre presque arbitrairement le rayon des lentilles, puisqu'on peut leur donner la masse nécessaire en les faisant suffisamment épaisses. Prend-on ce rayon r' égal à

2 pouces ou 0,055 de notre unité, il s'ensuit que h doit être plus grand que 0,055; mais comme il n'est pas à conseiller de rendre cette distance plus grande qu'il n'est nécessaire, je prendrai aussi 0,055 pour la distance du couteau au bord inférieur de la lentille supérieure et, par suite, je supposerai

$$h = 0,11.$$

Alors la première équation devient

$$(5) \qquad (m + m' + m'')\rho = (m' - m'')0,61.$$

et la quatrième

$$(6) \qquad (m' + m'')0,1221 = \tfrac{1}{4} m - (\mu + \mu' + \mu'').$$

Il faut maintenant exprimer les masses et les moments des trois parties de l'appareil en fonction de leurs dimensions :

1° La tige. Si l'on appelle l sa longueur, r son rayon, on a

$$m = lr^2, \qquad \mu = \frac{l^2}{12} m \quad \text{(à très peu près)}.$$

2° La lentille pesante, diamètre r', épaisseur δ ; comme la tige la traverse, elle présente un trou dont la longueur est $2r'$ et le rayon r. On a, pour un tel corps,

$$m' = r'^2 \delta - 2r' r^2,$$
$$\mu' = \frac{r'^4 \delta}{2} - \frac{2}{3} r'^3 r^2 = m' \frac{r'^2}{2} + \frac{1}{3} r'^3 r^2.$$

3° La lentille légère. Elle a les mêmes dimensions extérieures que la précédente, mais elle est creuse, et ses parois ont l'épaisseur e

$$m'' = (2r'\delta + 2r'^2)e.$$
$$\mu'' = (2r'^3 \delta + r'^4)e = m'' r'^2 - r'^4 e.$$

Les seconds termes des expressions de μ' et de μ'', $\frac{1}{3} r'^3 r^2$ et $-r'^4 e$ sont des grandeurs très petites que l'on peut négliger d'abord. Dans ce cas, les équations (5) et (6) deviennent

$$(m + m' + m'')\rho = 0,61(m' - m''),$$

$$(m' + m'')(0,1221 + \tfrac{3}{4} r'^2) = \tfrac{1}{4} m(1 - \tfrac{1}{3} l^2) + \tfrac{1}{4}(m' - m'')r'^2.$$

et, en faisant dans cette dernière $r' = 0,055$,

$$(m' + m'')0,12436875 = \tfrac{1}{4} m(1 - \tfrac{1}{3} l^2) + (m' - m'')0,00075625.$$

d'où l'on tire

$$\frac{m'}{m} = \frac{0,1525(1-\frac{1}{3}l^2)+\rho[\frac{1}{4}(1-\frac{1}{3}l^2)+0,125125]}{0,151729875-\rho.0,0015125},$$

$$\frac{m''}{m} = \frac{0,1525(1-\frac{1}{3}l^2)-\rho[\frac{1}{4}(1-\frac{1}{3}l^2)+0,1236125]}{0,151729875-\rho.0,0015125}.$$

Comme m'' doit être positif, la dernière équation donne la condition

$$0,1525(1-\tfrac{1}{3}l^2) > \rho[\tfrac{1}{4}(1-\tfrac{1}{3}l^2)+0,1236125],$$

ou

$$\rho < \frac{0,61(1-\frac{1}{3}l^2)}{1-\frac{1}{3}l^2+0,49445}.$$

Mais μ doit être plus grand que la distance des bords les plus éloignés des lentilles, qui est

$$1+2k+2r'=1,33;$$

si donc on pose

$$l=1,33+p,$$

p est positif et l'on a

$$\rho < 0,61\,\frac{1,2311-2,66p-p^2}{2,71445-2,66p-p^2}.$$

On a alors, pour différentes valeurs de p,

$p=0,$	$\rho < 0,2767.$
$p=0,05,$	$\rho < 0,2598.$
$p=0,10,$	$0,2419.$
$p=0,15,$	$0,2230.$
$p=0,20,$	$0,2029;$

d'où il suit que ρ, dans tous les cas, doit être pris considérablement moindre que 0,2767, puisque pour cette valeur (comme pour toutes les valeurs correspondantes de p et de ρ), la lentille légère disparaît entièrement, ce qui ne peut être. Cependant, il est convenable et avantageux d'amener ρ aussi près que possible de cette limite, ou de prendre p aussi petit que possible ; cela est convenable parce que ainsi le pendule est le plus court possible, et cela est avantageux parce qu'on assure ainsi l'exactitude du résultat déduit de la combinaison des oscillations autour des deux axes. Il faut donc prendre la lentille légère aussi légère que possible, ou rendre ses parois aussi minces que possible. Si on lu

donne une demi-ligne d'épaisseur, la lentille sera encore assez solide, je poserai donc

$$e = 0{,}0011 = 0{,}02\,r'.$$

Je vais maintenant essayer quelques valeurs de p, pour voir comment elles peuvent s'accorder avec celle que je donne à e.

Première hypothèse :

$$p = 0{,}10.$$

Puisque $2r^2$ est beaucoup plus petit que $r'\delta$, on a à peu près

$$m' = r'^2\delta, \qquad m'' = 2r'e(\delta - r'),$$

donc

$$\frac{m''}{m'} = \frac{2e}{r'}\left(1 - \frac{r'}{\delta}\right) = 0{,}04\left(1 - \frac{0{,}055}{\delta}\right).$$

Mais des deux expressions de $\frac{m'}{m}$ et de $\frac{m''}{m}$ on déduit

$$\frac{m''}{m'} = \frac{0{,}61\left(1 - \frac{1}{3}l^2\right) - \rho\left[\left(1 - \frac{1}{3}l^2\right) - 0{,}49145\right]}{0{,}61\left(1 - \frac{1}{3}l^2\right) + \rho\left[\left(1 - \frac{1}{3}l^2\right) + 0{,}50050\right]}.$$

La comparaison de ces deux expressions montre que δ et ρ croissent ou diminuent en même temps. Comme il est bon de faire ρ le plus grand possible, il faut aussi donner à δ la plus grande valeur qu'il puisse convenablement avoir ; je crois cependant qu'on ne peut aller au-dessus de 0,055 (à peu près 2 pouces), si l'on ne veut pas que le pendule devienne trop incommode à manier.

Si l'on adopte cette valeur, il vient

$$\frac{m''}{m'} = 0{,}08 = \frac{0{,}582611 - \rho.2{,}43842}{0{,}582611 + \rho.2{,}4566},$$

d'où l'on déduit

$$\rho = 0{,}2034.$$

Comme il n'est guère possible de laisser la tige dépasser les lentilles de moins de $\frac{1}{2}p = 0{,}05$, on ne peut donner à ρ de valeur notablement plus grande. Je m'en tiendrai donc à cette hypothèse, et j'arrive maintenant au calcul exact.

Nous avons successivement supposé

$$k = 0{,}11,$$
$$r' = 0{,}055,$$
$$\delta = 0{,}055,$$
$$e = 0{,}0011,$$
$$l = 1{,}43.$$

Avec ces valeurs, il vient

$$m = 1,43\,r^2, \qquad \mu = 0,24368392\,r^2,$$
$$m' = 0,000166375 - 0,11\,r^2, \qquad \mu' = 0,0000002516 - 0,0001664\,r^2,$$
$$m'' = 0,000013310, \qquad \mu'' = 0,0000000302.$$

Les équations (5) et (6) deviennent

$$(5) \qquad (1,32\,r^2 + 0,000179685)\rho = 0,61(0,000153065 - 0,11\,r^2),$$

$$(6) \qquad (0,000179685 + 0,11\,r^2)\,0,1221 = 0,11398248\,r^2 - 0,0000002818.$$

et l'on en tire

$$r^2 = 0,000174404, \qquad r = 0,013206,$$
$$\rho = 0,199237.$$

On a donc les dimensions suivantes du pendule :

Distance des couteaux	1
Longueur de la tige	1,43
Rayon de la tige	0,013206
Distance des centres des lentilles au milieu de la tige...	0,61
Rayon des lentilles	0,055
Épaisseur des lentilles	0,055
Épaisseur des parois de la lentille creuse	0,0011

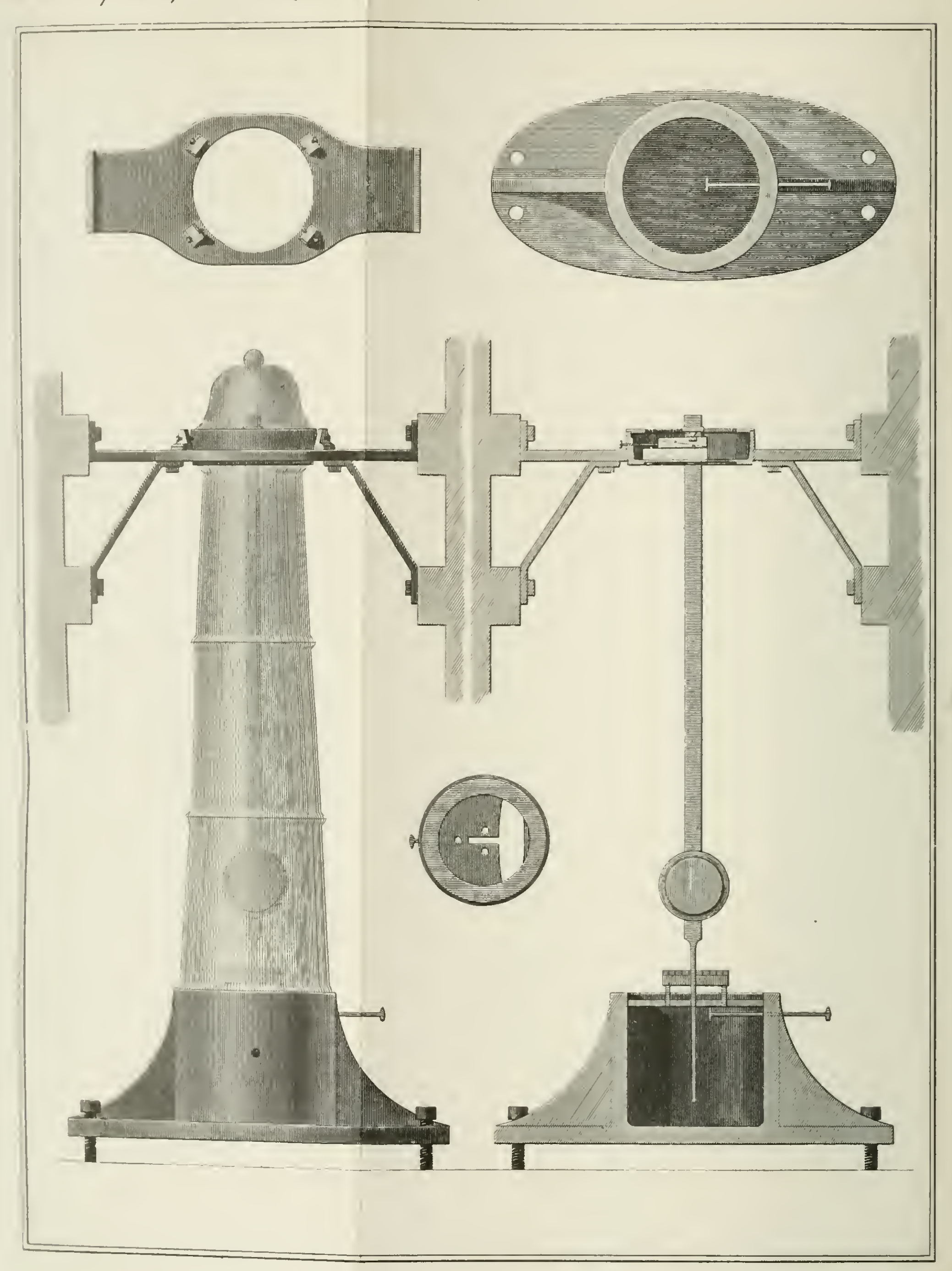
Dans la construction du pendule, on prendra d'abord la tige un peu plus longue, afin de pouvoir obtenir l'égalité parfaite des durées d'oscillation en la rognant symétriquement aux deux bouts. Le pendule pèsera à peu près 22,8 livres de Prusse, s'il est fait en laiton.

FIN DU TOME V.

TABLE DES MATIÈRES

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME V.

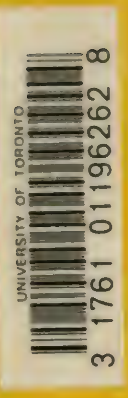
15716 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.



Phototypie A. Quinsac & C. Baqué. Paris.

EXPÉRIENCES DE SABINE SUR LE PENDULE DANS LE VIDE.


UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01037622 6



CE